300151

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG DER
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
(UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN)

REDIGIERT VON
JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZWEIUNDDREISSIGSTER BAND 1922

BUDAPEST
DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN
1923

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG DER
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
(UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN)

REDIGIERT VON
JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZWEIUNDDREISSIGSTER BAND 1922

BUDAPEST
DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN
1923

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

INHALT DES XXXII. BANDES.

Sitzungsberichte

Seite

der III. (mathematisch—naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (Magyar Tudományos Akadémia). IV

Abhandlungen.

1. I. Fröhlich: Experimenteller Nachweis des longitudinalen Lichtvektors im gebrochenen Strahle bei Totalreflexion. Mit 14 Figuren 1
2. I. Fröhlich: Ein Reziprozitätssatz in der physikalischen Optik. Mit 4 Figuren 19
3. I. Fröhlich: Umwandlung eines parallelen linearpolarisierten Strahlenbündels mittels optischer Linse in einen kreisförmigen Strahlenkegel. Mit 3 Figuren 31
4. J. Farkas: Stabiles Gleichgewicht ohne Potential 43
5. J. Farkas: Einsteinsche Gravitation nach alter Theorie 51
6. K. Tangl: Neue Methode zur Untersuchung der Grenzflächenspannung fest-flüssig. Mit 3 Figuren 57
7. F. v. Konek: Über eine neue Bildungsweise der Photocatechusäure 63
8. F. v. Konek: Über eine eigenartige Verkettung von Arylaminosäuren mit ihresgleichen und mit alifatischen Aminosäuren 66
9. F. Schafarzik: Über die neueste geologische Kartierung von Budapest und Umgebung. Mit 1 Figur 68
10. B. Mauritz: Kupferkies von Botes in Siebenbürgen. Mit 14 Figuren 75
11. B. Mauritz: Adular auf den Erzgängen der ungarisch—sieberbürgischen Andesite 84
12. † B. Baradlai: Die Mineralien vom Bergwerke Luciabánya im Zips-Gömörer Erzgebiete. Mit 3 Figuren 87
13. F. Filarszky: Über die Theorie und Rolle der Zellkernseparationsteilung in der Entwicklungsgeschichte und Systemisierung der Gewächse. Mit 1 Figur 93
14. Baron B. v. Harkányi. Beiträge zur Theorie der Sternenentwickelung 108

★

SITZUNGSBERICHTE

der III. (mathematisch—naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (Magyar Tudományos Akadémia).

Oktober 1921 — Juni 1922.

Sitzung am 3. Oktober 1921.

Julius Farkas, o. M.: *Einsteinsche Gravitation nach älterer Theorie.* Vorgelegt durch Isidor Fröhlich, o. M.

Sitzung am 24. Oktober 1921.

1. Kolomann Kertész, o. M.: *Synopsis der Fliegen von Ungarn. II. Tetanoceridae.*
2. Michael Bauer: *Die Theorie der p-adischen, bzw. P-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlen.* Vorgelegt durch Josef Kürschák, o. M.
3. Béla Kerékjártó: *Die Invarianz des Gebietes.* Vorgelegt durch Josef Kürschák, o. M.
4. Nikolaus Vendel: *Beiträge zur optischen Kenntnis der Albite.* Vorgelegt durch Béla Mauritz, k. M.

Sitzung am 19. Dezember 1921.

1. Franz Schafarzik, o. M.: *Über die neueste geologische Kartierung von Budapest und Umgebung.* Antrittsvortrag.
2. Ladislaus Hollós, k. M.: *Neue Pilze von der Umgebung von Szegszárd.* Vorgelegt durch Alexander Mágócsy-Dietz, o. M.

Sitzung am 16. Januar 1922.

1. Emerich Szarvasy, k. M.: *Der Reaktionsmechanismus des Methan-Chlors.*
2. Josef Varga: *Die Wirkung stiller Entladungen auf Brom-Methan- und Jod-Methan-Gemenge.* Vorgelegt durch Emerich Szarvasy, k. M.
3. Julius Wicklein: *Die Wirkung stiller Entladungen auf Methan.* Vorgelegt durch Emerich Szarvasy, k. M.
4. Elemér Császár: *Die Quantum-Emissions Hypothese und die Theorie der schwarzen Strahlung.* Vorgelegt durch Isidor Fröhlich, o. M.
5. Ladislaus Tokody: *Neuere Daten zur optischen Kenntnis des Fassait von Hodrusbánya.* Vorgelegt durch Karl Zimányi, o. M.

6. Victor Zsinay: *Chemische Analyse des Fassait von Hodrusbánya.* Vorgelegt durch Karl Zimányi, o. M.

Sitzung am 13. Feber 1922.

1. Emerich Szarvasy, k. M.: a) *Die Erzeugung von Carbonylchlorid im Elektrisator.* b) *Die Erzeugung von Methylalkohol aus Methan.*
2. Ludwig Steiner, k. M.: *Die Temperaturverhältnisse in der Eishöhle von Dobsina.* Vorgelegt durch den Sekretär der Klasse.
3. Rudolf Ortvay: *Der* **Sagnac**-*sche Versuch vom Standpunkte der allgemeinem Relativitätstheorie.* Vorgelegt durch den Sekretär der Klasse statt Julius Farkas, o. M.

Sitzung am 13. März 1922.

1. Fritz v. Konek, k. M.: *Chemische Konfiguration und physiologische Wirkung.*
2. Josef Marek, k. M., legt sein *Lehrbuch der klinischen Diagnostik der Haustiere* vor.
3. Karl Schilberszky: *Neuere Daten zur Biologie von Sclerotinia sclerotiorum Lib. und dessen phytopathologisches Verhalten.* Vorgelegt durch Alexander Mágócsy-Dietz, o. M.
4. Aladár Vendl: *Die grossen Feldspatkörner des Versetzer Gneis.* Vorgelegt durch Franz Schafarzik, o. M.
5. Eugen Kramár: *Untersuchungen über die chemische Natur der Hülle einiger Bakterien.* Vorgelegt durch Hugo Preisz, k. M.

Sitzung am 24. April 1922.

1. Julius Istvánffy, o. M.: *Das Maisstroh als Rohstoff der Cellulose-Fabrikation.* Antrittsvortrag.
2. Emerich Szarvasy, k. M.: *Zersetzung des Methan bei hoher Temperatur.*

Sitzung am 22. Mai 1922.

1. Ludwig v. Méhely, o. M.: *Die biologischen Grundlagen der Rassenfrage.*
2. Fritz v. Konek, k. M.: a) *Über eine neue Bildungsweise der Protocatechusäure.* b) *Über eine eigenartige Verkettung von Arylaminosäuren mit ihresgleichen und mit alifatischen Aminosäuren.*
3. Fritz v. Konek, k. M. und Nikolaus Szenák: *Daten zur Kenntnis der Ketodihydroinden (Hydrindoren).*
4. Fritz v. Konek, k. M. und Aloys Loczka: *Synthese abwechselnd sublimierter Arylbenzoylglykolsäurerester.*
5. Béla Kerékjártó: *Über die Topologie der Kurven und Kurvenscharen* Vorgelegt durch Josef Kürschák, o. M.

Sitzung am 29. Mai 1922.

1. Baron Béla v. Harkányi: *Beiträge zur Theorie der Sternenentwickelung.* Antrittsvortrag.
2. Wilhelm Hankó, o. M. und Camill Grabovszky: *Johann Irinyi, der Erfinder und Schriftsteller.*
3. Ferdinánd Filarszky, k. M. legt das Manuskript seines Buches «Pflanzensystematik» vor.
4. Nikolaus Vendl: *Der Feldspat des Rhyolithgesteines des Végardóer Somlyó-Berges.* Vorgelegt durch Karl Zimányi, o. M.
5. Andreas Dudich: *Die Variation von Cyclommatus Thunk.* Vorgelegt durch Koloman Kertész, k. M.
6. Zoltán Szabó: *Systematisierung der Cephalarien.* Vorgelegt durch Árpád Degen, k. M.

1.

EXPERIMENTELLER NACHWEIS DES LONGITUDINALEN LICHTVEKTORS IM GEBROCHENEN STRAHLE BEI TOTALREFLEXION.

Von Dr. I. FRÖHLICH,

O. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BUDAPEST.

(Auszug einer, der III. Klasse der Akademie den 14. Februar 1916 vorgelegten Abhandlung.)*

Zahlreiche erfahrene Physiker beschäftigten sich in den letzten Jahrzehnten mit dem gebrochenen Lichtstrahl, der bei der Totalreflexion in das optisch dünnere Mittel eindringt, dort eine zur brechenden Ebene senkrechte Wellenebene von variabler Amplitude bildet, die längs der Einfallsebene, parallel zur Brechungsfläche, mit der Geschwindigkeit $\frac{\lambda_2}{T.n.\sin\varphi_1}$ fortschreitet und dessen Amplitude in sehr geringer Eindringungstiefe von der Brechungsfläche verschwindet; dabei ist λ_2 die Wellenlänge im optisch dünneren-, φ_1 der Einfallswinkel im optisch dichteren Mittel, T die Schwingungsdauer und n der Brechungsindex $\lambda_2 : \lambda_1$.

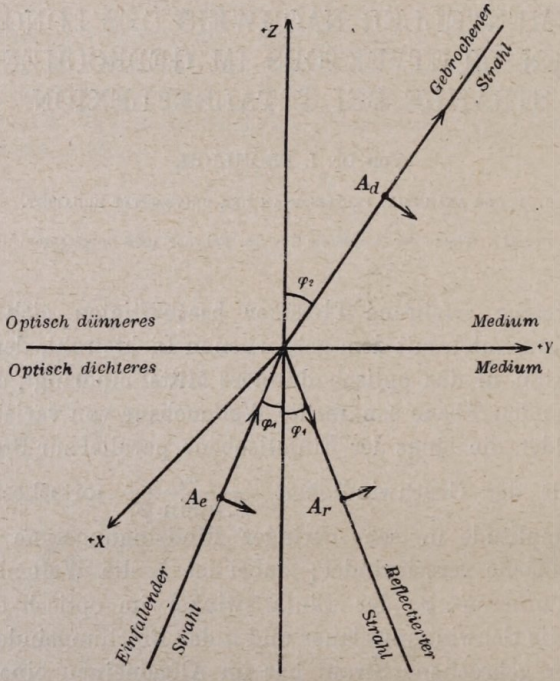
Dieser gebrochene Strahl hat im Allgemeinen eine Vektorkomponente, die in der Fortpflanzungsrichtung seiner Wellenebene alterniert, also in dieser Beziehung *longitudinal* ist.

---

* Dieselbe erschien infolge der Kriegsumstände bisher nur in ungarischer Sprache unter dem Titel: *A teljes fényvisszaverődésnél megtört sugár polározása állapotának vizsgálata.* (Untersuchung des Polarisationszustandes des bei der Totalreflexion gebrochenen Strahles.) Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der W.) Bd. XXXV, Budapest 1917, S. 120—158.

Vorliegende Mitteilung enthält den erfahrungsgemässen Nachweis, daß man bei dieser Erscheinung Tatsachen beobachten kann, die sich mit genügender Genauigkeit durchaus so bilden, als ob dieser longitudinale Vektor in lichterzeugender Weise an diesen Erscheinungen mitwirkte.

§. 1. *Zusammenstellung der Vektoren-Ausdrücke für einfallendes, reflektiertes und gebrochenes Licht bei Totalreflexion.*[1]



Figur 1.

Es sei in Fig. 1 XY die Grenzebene zweier isotropen, durchsichtigen, optisch verschiedenen Medien, φ_1 der Einfallswinkel, φ_2 der Brechungswinkel, YZ die Einfallsebene.

Der einfallende Strahl sei im allgemeinen elliptisch polarisiert. E_s und $\varepsilon_{e,s}$ seien die Amplitude und Anfangsphase der

[1] Die ganz ausführlich durchgearbeitete Theorie findet sich in oben angeführter Originalarbeit des Verfassers.

einfallenden, zur Einfallsebene senkrechten Vektorkomponente. E_p und $\varepsilon_{e,p}$ seien die Amplitude und Anfangsphase der einfallenden, zur Einfallsebene parallelen Vektorkomponente ferner haben R_s, $\varepsilon_{r,s}$; R_p, $\varepsilon_{r,p}$ und D_s, $\varepsilon_{d,s}$; D_p, $\varepsilon_{d,p}$ dieselbe Bedeutung in bezug auf den reflektierten und auf den gebrochenen (durchgehenden) Strahl.

Der einfallende Strahl geht vom optisch dichteren gegen das dünnere Medium; $A_e\,(x_e y_e z_e)$; $A_r\,(x_r y_r z_r)$; $A_d\,(x_d y_d z_d)$ seien Punkte in diesen Strahlen.

Es sei noch φ_1 *größer*, als der *Grenzwinkel* der *totalen Reflexion;* dann wird bekanntlich:

$$\cos\varphi_2 = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}.$$

Die Ausdrücke der Vektorkomponenten des einfallenden Strahles seien:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_e = +E_s\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,s}); \\ Y_e = +E_p\cos\varphi_1\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,p}); \\ Z_e = -E_p\sin\varphi_1\cos(\psi_e + \varepsilon_{e,p}). \end{cases}$$

Der variable Teil der Phase ist hier:

$$(1_a)\qquad \psi_e = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_e\sin\varphi_1 + z_e\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right).$$

Man findet dann nach der bekannten Theorie für die Ausdrücke der *totalreflektierten* Vektorkomponenten:

$$(2)\qquad \begin{cases} X_r = +E_s\cos(\psi_r + \varepsilon_{r,s} + \delta_{r,s}); \\ Y_r = -E_p\cos\varphi_1\cos(\psi_r + \varepsilon_{r,p} + \delta_{r,p}); \\ Z_r = -E_p\sin\varphi_1\cos(\psi_r + \varepsilon_{r,p} + \delta_{r,p}). \end{cases}$$

Hier sind:

$$(2_a)\qquad \psi_r = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_r\sin\varphi_1 - z_r\cos\varphi_1}{\lambda_1}\right);$$

und $\delta_{r,s}$; $\delta_{r,p}$ bedeuten die infolge der Totalreflexion eingetretenen Phasenänderungen dieser Komponenten, die wir unten in (5) anschreiben.

Ebenso ergeben sich die Ausdrücke für die Vektorkompo-

nenten im gebrochenen Strahle, die uns hier besonders interessieren:

$$(3)\quad \begin{cases} X_d = + D_s \cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}} \cdot \cos\left(\chi_d + \varepsilon_{d,s} + \delta_{d,s}\right), \\ Y_d = + D_p \cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}} \cdot \sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1} \\ \qquad\qquad \cdot \cos\left(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p} - \tfrac{1}{2}\pi\right), \\ Z_d = - D_p \cdot e^{-\frac{2\pi z_d}{\lambda_2}\cdot\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1-1}} \cdot n \cdot \sin\varphi_1 \\ \qquad\qquad \cdot \cos\left(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p}\right). \end{cases}$$

Hier sind entsprechend:

$$(3_a)\quad \chi_d = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y_d \sin\varphi_1}{\lambda_1}\right)2\pi = \left(\frac{t}{T} - \frac{y_d \sin\varphi_2}{\lambda_2}\right) = \chi_d;$$

und $\delta_{d,s}$; $\delta_{d,p}$ die infolge der bei Totalreflexion erfolgten Brechung eingetretenen Phasenänderungen dieser Komponenten, die wir ebenfalls unten in (5) anschreiben.

D_s und D_p sind reelle Konstanten, ebenso die beiden Wellenlängen λ_1 und λ_2 im optisch dichteren und dünneren Medium.

Aus der Theorie folgt ferner:

$$(4)\quad \begin{cases} D_s = + E_s \dfrac{2n}{\sqrt{n^2-1}} \cdot \cos\varphi_1; \\ D_p = + E_p \dfrac{2n}{\sqrt{n^2-1}} \cdot \dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\varphi_1 - 1}}; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\delta_{d,s}\right) = + \dfrac{\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}{n\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\delta_{r,s}\right); \\ \operatorname{tg}\left(\delta_{d,p}\right) = + \dfrac{n\sqrt{n^2\sin^2\varphi_1 - 1}}{\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\delta_{r,p}\right); \end{cases}$$

$$(6)\quad \varepsilon_{e,s} = \varepsilon_{r,s} = \varepsilon_{d,s} = \varepsilon_{e,s}; \quad \varepsilon_{e,p} = \varepsilon_{r,p} = \varepsilon_{d,p} = \varepsilon_{e,p}.$$

Aus (3) ist ersichtlich, dass der gebrochene Vektor zwar in das dünnere Medium eindringt; aber seine Amplitude nimmt mit der Eindringungstiefe z_d sehr rasch ab. Dieser eindringende Vektor ist im Allgemeinen elliptisch, da er drei aufeinander senkrechte, zeitlich einfach harmonische Komponenten hat.

Wie aus (3) und (3_a) ersichtlich ist, hat jede Komponente des hier gebrochenen Strahlenvektors die Wellenebene (die Ebene gleicher Phase) $y_d = konstans$; jedoch ist die Amplitude in dieser Ebene von z_d abhängig; demnach ist die Wellenebene eine solche von *inkonstanter* Amplitude (oder, wie auch gebräuchlich, eine inhomogene Welle).

Aus dem variabeln Phasenteil χ_d, (3_a) folgt, daß die erwähnte Wellenebene parallel zu XZ, mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v_d = \frac{\lambda_1}{T \sin \varphi_1} = \frac{\lambda_2}{T \sin \varphi_2} = v_d$$

längs der y-Koordinate (der Wellennormale), parallel zu sich selbst fortschreitet.

Dieser gebrochene Strahlenbündel kann sich nur in einer sehr dünnen Schicht des dünneren Mediums bilden, da seine Amplitude schon in sehr geringer Eindringungstiefe z_d von der Grenzfläche ab verschwindet.

§. 2. *Vereinfachung: Der einfallende Vektor sei linear und schwinge in der Einfallsebene.*

In diesem Falle ist $E_s = 0$; es bleibt in (1) nur Y_e und Z_e, die also die Komponenten des einfallenden *linearen* Vektors $E_p \cos(\psi_e + \varepsilon_{e,p})$ sind, der mit der Grenzflächennormalen Z den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \varphi_1$ bildet.

In (2) bleibt nur Y_r und Z_r; diese sind hier die Komponenten des ebenfalls in der Einfallsebene liegenden total reflektierten *linearen* Vektors $E_p \cos(\psi_r + \varepsilon_{r,p} + \delta_{r,p})$, der mit der Normalen Z den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varphi_1$ bildet.

In (3) bleibt auch nur Y_d und Z_d; diese sind hier die Komponenten des auch nur in der Einfallsebene liegenden gebrochenen, jedoch wie sofort ersichtlich, *nicht linearen* Vektors; ihre Ausdrücke sind nun:

$$(7) \quad \begin{cases} Y_d = +D_p \cdot e^{-\eta z_d} \cdot \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1} \cdot \sin(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p}); \\ Z_d = +D_p \cdot e^{-\eta z_d} \cdot n \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin(\chi_d + \varepsilon_{d,p} + \delta_{d,p} - \frac{1}{2}\pi); \end{cases}$$

dabei ist:

$$\eta + \frac{2\pi}{\lambda_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}; \quad \chi_d = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y_d \sin \varphi_1}{\lambda_1} \right).$$

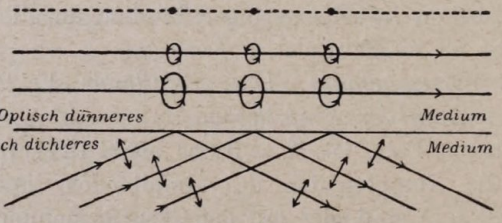
Man erkennt sofort, daß Y_d und Z_d die Komponenten eines solchen *elliptischen* Vektors sind, dessen Halbaxen längs der Y-, bezüglicherweise der Z-Achse liegen, deren Amplitudenverhältniss: $\frac{n \sin \varphi_1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}}$, deren Phasendifferenz $+\frac{1}{2}\pi$ beträgt.

Die Halbaxen:

$$D_p . e^{-\eta z_d} \sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1} \quad \text{und} \quad D_p . e^{-\eta z_d} . n \sin \varphi_1$$

liegen demnach ebenfalls in der Einfallsebene; somit auch der elliptische Vektor. Die Wellen*ebene* dieses Vektors hat die Gleichung y_d=konstans, also schreitet dieser Vektor mit der Geschwindigkeit $\frac{\lambda_1}{T \sin \varphi_1} = \frac{\lambda_2}{T \sin \varphi_2}$ längs der Y-Richtung fort.

Die Ebene des elliptischen Vektors ist also hier *senkrecht* zur Ebene gleicher Phasen (zur Wellenebene) und der Vektor



Figur 2.

pflanzt sich hier zwar normal zur Wellenebene fort, jedoch *liegt* die Komponente Y_d *in der Fortpflanzungrichtung*; dies ist demnach hier der *longitudinale Lichtvektor.*

Befindet sich das Auge des Beobachters, bei Berücksichtigung der Figur 1, vor der Ebene der Zeichnung auf der positiven Seite der x und blickt es gegen O zu, so wird der betrachtete elliptische Vektor seine Bahn mit negativen Umlauf, entgegen der Bewegung des Uhrenzeigers beschreiben.

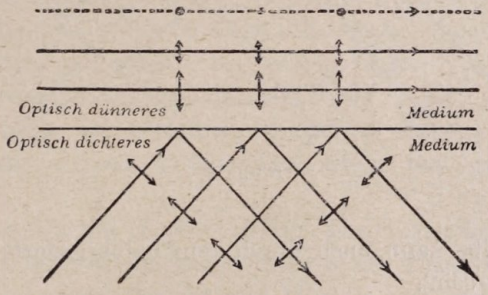
Figur 2 stellt diese Beziehungen dar: das totalreflektierte Licht ist linearpolarisiert; das in das dünnere Mittel gebrochene Licht zeigt die erläuterte elliptische Polarisation; alle diese Vektoren liegen in der Einfallsebene (hier zugleich Zeichnungsebene); auch die Abnahme der gebrochenen Amplitude und

ihr Verschwinden ist längs den drei Geraden im dünneren Medium angedeutet.

Anmerkung: Im Ausnahmefalle, wenn der Einfallswinkel φ_1 gleich ist dem *Grenzwinkel* der *totalen Reflexion,* also wenn $\sin \varphi_1 = \frac{1}{n}$, dann verschwindet die Amplitude von Y_d und es bleibt aus (7) nur Z_d, dessen Amplitude wie man leicht findet, $+2nE_p$ ist, also ein linearer Vektor, normal zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die hier $\frac{\lambda_1}{T \sin \varphi_1} = \frac{n\lambda_1}{T} = \frac{\lambda_2}{T}$ ist.

Wird φ_1 um ein Geringes grösser als der Grenzwinkel, also $\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}$ etwas grösser als Null, so bleibt Y_d noch immer sehr klein, jedoch tritt in Z_d der Faktor $e^{-\eta z_d}$ hinzu, der obige Amplitude mit wachsendem z_d schnell abnehmen macht.

Man kann dann den Vektor des entstehenden gebrochenen Strahles sehr angenähert durch Figur 3 darstellen, wobei der



Figur 3.

Einfallswinkel nur sehr wenig grösser ist, als der Grenzwinkel totaler Reflexion. Diesen Fall des gebrochenen Strahles und die Polarisation des aus seinem Vektor entstandenen zersteuten Strahlensystems untersuchte nachträglich Herr P. Fröhlich.[1]

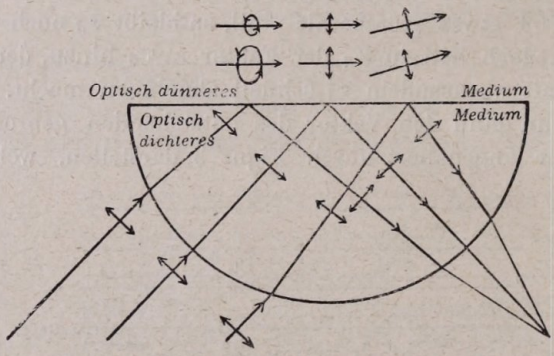
---

[1] Fröhlich Pál: Újabb észleletek a teljes fényvisszaverődésnél megtört sugár polárosságáról. Mathematikai és Természettudományi Értesítő Bd. XXXVI. Budapest, 1918. (Auch als Doktordissertation abgedruckt.)

Im Auszug: Neuere Beobachtungen über die Polarisation des bei der Totalreflexion gebrochenen Lichtes. Annalen der Physik, IV. Folge, Bd. 63, (1920.) p. 900—916.

§. 3. *Experimentelle Darstellung der Erscheinung. Qualitative und quantitative Untersuchung.*

a) *Qualitative Darstellung.* Man beruße die Durchmesserebene einer geschliffenen Halbkugel aus Glas, Fig. 4, in vorsichtiger, gleichmäßiger Weise, etwa mittels einer Kerzenflamme, so daß diese Ebene von einer *sehr dünnen,* mit freiem Auge kaum wahrnehmenbaren Rußschicht bedeckt ist. Ein *sehr intensives,* planparalleles, senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Strahlenbündel falle in Figur 4 dargestellter Art auf die Halb-



Figur 4.

kugel (dieselbe kann auch durch eine halbkreisförmige Zilinderlinse ersetzt sein).

Von den in der Zeichnung ersichtlichen drei Strahlen dieses in das Innere der Glassubstanz eindringenden Bündels erleidet der rechtsseitige nach an der Kugelfläche erfolgten Brechung an der Durchmesserebene gewöhnliche Reflexion und gewöhnliche Refraktion, wie dies auch die gezeichneten Strahlenrichtungen und Vektorenrichtungen anzeigen.

Der mittlere Strahl fällt auf die Durchmesserebene und zwar gerade im Grenzwinkel der totalen Reflexion auf und erleidet an der Durchmesserebene totale Reflexion und damit verbundene Brechung; auch hier sind Strahlen- und Vektorenrichtungen ersichtlich und sind in Übereinstimmung mit Fig. 3.

Der linksseitige Strahl fällt schon unter größerem als dem

Grenzwinkel der totalen Reflexion auf die Durchmesserebene, erleidet an derselben totale Reflexion und damit verbundene Brechung, wobei also der entstandene elliptische Vektor im gebrochenen Strahl in der Einfalls- (Zeichnungs-) Ebene, parallel zur Durchmesserebene fortschreitet.

Dieser Versuch läßt sich sehr leicht ausführen und dann zeigt die mittlere, genügend erleuchtete Rußfläche *gleichzeitig, neben einander* die hier genannten Polarisationszustände. Sehr geeignet ist dazu ein BABINET'scher Kompensator und ein zugehöriger Analysator; man sieht sofort, daß an der Stelle, wo der unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion einfallende Strahl die Grenzebene trifft, das dort auftretende Interferenz-Streifensystem innerhalb einer geringen Längsausdehnung eine ganz bedeutende bruchförmige Veränderung zeigt: an der einen Seite das Bruches weisen die Streifen auf lineare Polarisation hin, an der andern Seite auf elliptische Polarisation; der Übergang an der Stelle des Grenzstrahles ist bei homogenem Lichte sehr plötzlich und scharf; bei weißen Lichte nicht so plötzlich und in einem geringen Intervall etwas trübe; aber von der Übergangsstelle an gerechnet, etwa zwei Bogengrade diesseits oder jenseits ist die Polarisation schon von ganz bestimmter Art.

b) *Quantitative Untersuchung.* Die Erfahrung lehrt nun, daß die ultramikroskopischen Teilchen der Rußschicht auch die Teilchen derjenigen Schicht des Mediums, in welchem sich die Ersteren befinden, veranlassen, ebenfalls sekundäre, lichterregende Mittelpunkte zu werden, deren Vektoren gleicher Art sind den Vektoren des hier gebrochenen Strahles. Jeder solche Vektor erzeugt nun um seinen Mittelpunkt (um seine Gleichgewichtslage) ein System sekundärer Strahlen, deren Vektoren im selben Medium, wie der erregende Vektor einfach proportional sind der Projektion des erregenden Vektors auf die zum sekundären Strahl senkrechte Ebene.

Dringt jedoch solch ein sekundärer Strahl vom sekundären Erregungspunkte aus nach Durchgang durch das optisch dünnere Mittel in das optisch dichtere, so müssen noch andere Überlegungen angestellt werden, um den Polarisationszustand solcher

Strahlen im dichteren Mittel theoretisch festzustellen. Damit wollen wir uns hier nicht beschäftigen.[1]

Es genügt, wenn man die in § 2, Formel (7), Figur 2 behandelte Erscheinung, in welcher der longitudinale Lichtvektor Y_d auftritt, dazu benützt, um zu untersuchen, ob die aus den dort vorhandenen sekundären elliptischen Lichtzentren entstandenen, in Luft zerstreuten Strahlen auch wirklich eine solche Polarisation besitzen, wie dies aus der Theorie folgt, ob nämlich die Vektoren der *in Luft* zerstreuten Strahlen in der Tat Projektionen der erregenden sekundären Vektorenellipse auf die zum jeweiligen zerstreuten Strahle senkrechte Ebene sind?

Man braucht dazu nur diejenigen, in Luft zerstreuten Srahlen zu beobachten, die in der, zur Einfallsebene senkrechten Ebene liegen: stellt man also die Erscheinung der Figur 2 mittels der erwähnten Halbkugel aus Glas her, so geht die genannte Zerstreuungsebene durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, senkrecht zur Ebene des zu untersuchenden elliptischen Vektors.

Die Glashalbkugel wurde nun auf einen großen Jamin-Sénarmont'schen Polarisationkreis montiert und die Polarisation des in Luft zerstreuten Strahlensystemes mittels Babinet'schem Kompensator und Analysator untersucht und so der Polarisationszustand jedes einzelnen beobachteten Strahles festgestellt.

Es mögen hier die Einzelheiten dieser experimentellen Einrichtung übergangen werden; dieselben sind in der eingangs erwähnten ungarischen Originalpublikation zu finden; es genügt hier die Beobachtungsresultate einer einfachen Strahlenreihe und ihre Vergleichung mit der Theorie mitzuteilen.

§. 4. *Eine einfache Beobachtungsreihe; deren reduzierte Daten.*

Die gebrauchte Glashalbkugel hat den Brechungsindex für mittleres Licht: $n=1{\cdot}472$; ferner war der bei Herstellung der

[1] Derartige Untersuchungen hat Verfasser ganz ausführlich ausgeführt: *Különböző törésű, átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében lévő fénylő pontok elméletéhez.* (Zur Theorie der leuchtenden Punkte die sehr nahe zur Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien liegen.) Mathematikai és Természettudományi Értesítő, Bd. XXXIV. (1916.) S. 453—517.

Erscheinung hier benützte Einfallswinkel $\varphi_1 = 65°0$; daraus ergab sich:

$$\frac{n \sin \varphi_1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} = 1{\cdot}511;$$

dies ist der Quotient der beiden Halbachsen des sekundären elliptischen Erregungsvektors; die längs $+Z$ (also längs der positiven, in Luft gezogenen Normale N der berußten Ebene) liegende Halbachse ist daher etwa anderthalbmal so groß, wie die längs Y (also parallel der berußten Ebene) liegende.

Die Beobachtungen, deren Daten unten folgen, stellte auf meine Veranlassung im Jahre 1913/14 Herr Ludwig Frenyó im Rahmen einer sehr ausführlichen experimentellen Untersuchung an; deren Reduktion und sonstige Bearbeitung überblieb mir, da der genannte Beobachter zu Felde zog.

Wie erwähnt, lagen alle gebeugten Strahlen, die *hier* benützt wurden, in der zur Einfallsebene senkrechten, durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene. Es bedeutet nun im Folgenden:

ϑ_N den Winkel zwischen der Zerstreuungsebene des jeweiligen Strahles und der Einfallsebene (dieser Winkel ist *hier* $+90°$ oder $-90°$);

ω_N den Winkel zwischen dem jeweiligen zerstreuten Strahl und der Normale N der berußten Durchmesserebene;

a den Winkel der A genannten Hauptachse des beobachteten elliptischen Vektors mit der Längsachse des Kompensators;

K den arcus der Tangente $B : A$, wobei B die andere Hauptachse diese Vektors ist und $0 \lessgtr K \leqq \frac{1}{2}\pi$;

$\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$ die beobachtete Phasendifferenz der beiden aufeinander senkrechten Vektorkomponenten des jeweiligen zerstreuten Strahles;

a und b die Amplituden *dieser* beiden parallel zu Y, bezüglicherweise zu Z schwingenden Komponenten, deren Quotient die Tangente des Winkels k ist;

β den Winkel zwischen der Längsachse der Kompensators und dem (gewöhnlich horizontalen) Hauptkreise der Apparates;

$\mathfrak{A}_+$ das Azimut des Analysators, abgelesen an dessen Positionskreis, wenn der Analysator so eingestellt ist, daß im

Kompensator der zwischen seinen feinen beiden Parallelfäden gebrachte dunkle Interferenzstreifen am dunkelsten erscheint (der Zustand der hergestellten linearen Polarisation, wobei nun der lineare Vektor des Streifens ausgelöscht ist).

$\mathfrak{A}_-$ das Azimut desselben Analysators, wenn dessen Lage bei sonst unveränderten Verhältnissen sich in dem, dem soeben wähnten vorigen entgegengesetzten Quadranten befindet.

Aus $\mathfrak{A}_+$ und $\mathfrak{A}_-$ lassen sich mittels einer, am Apparate befindlichen besonderen einfachen Vorrichtung der Winkel k bestimmen.

Hat man nun *aus der Beobachtung* die Werte von k und ε gefunden, so geben die einfachen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(2a) &= \operatorname{tg}(2k)\cos\varepsilon \\ \sin(2K) &= \pm\sin(2k)\sin\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

die Grössen a und K, welche die *Lage* und die geometrische *Form* (nicht aber Dimension) und die *Umlaufsrichtung* der beobachteten Vektorenellipse unmittelbar ausdrücken. Der Beobachter, in dessen Auge der zerstreute Strahl gelangt, wird die Umlaufrichtung seines Vektors *positiv*, also gleich derjenigen der Uhrenzeigerbewegung finden, wenn $\varepsilon_a - \varepsilon_b$ *positiv* ist, und umgekehrt.

Die *Grundpositionen* des Nonius des Analysators sind diejenigen, bei denen die parallel zum Hauptkreise des Apparates schwingende Vektorenkomponente *ausgelöscht* erscheint (es ist dann die Polarisationsebene des Analysators parallel zum Hauptkreise); diese Azimute seien $\mathfrak{A}_{+0}$ und $\mathfrak{A}_{-0}$.

Mit diesen bilde man die Werte:

$$\alpha = \mathfrak{A}_+ - \mathfrak{A}_{+0} = \mathfrak{A}_- - \mathfrak{A}_{-0} = \alpha,$$

und man findet $k = \pi - \alpha \mp \beta$; je nachdem die Längsachse des Kompensators zur Ebene des Hauptkreises negativ oder positiv gedreht ist.

Die gefundenen Beobachtungsergebnisse sind nun in diesem Falle wie folgt: Die Grundazimute:

$$\mathfrak{A}_{+0} = +11°{\cdot}1; \quad \mathfrak{A}_{-0} = +168°{\cdot}9.$$

Tafel I.

ϑ_N	ω_N	$\mathfrak{A}_+$	$\mathfrak{A}_-$	$\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$ Mittelwert	β
−90°·0	15°·0	161°·1	−20°·6	−79°·2	− 6°·9
+90°·0	15°·0	173°·7	− 4°·9	+85°·3	+ 6°·9
−90°·0	30°·0	142°·1	−37°·4	−78°·7	−13°·1
+90°·0	30°·0	171°·1	−10°·4	+85°·9	+13°·1
−90°·0	45°·0	127°·6	−51°·3	−78°·7	−18°·3
+90°·0	45°·0	163°·1	−15°·2	+87°·1	+18°·3
−90°·0	60°·0	114°·5	−63°·9	−80°·4	−21°·9
+90°·0	60°·0	159°·1	−17°·7	+89°·8	+21°·9
−90°·0	75°·0	107°·2	−68°·8	−78°·8	−24°·3

Aus diesen Angaben lassen sich also die charakteristischen Daten ε, und k, und daraus a und K für jeden *beobachteten* Strahlenvektor auswerten; siehe in der folgenden Tafel II. die mit obs. vermerkten Daten.

§. 5. *Berechnung der theoretisch zu erwartenden Vektoren und deren Vergleichung mit der Beobachtung.*

Aus der Theorie der Totalreflexion ist in dem beobachteten Falle im gebrochenen Lichte in der schwachberußten Schichte des dünneren Mediums ein *elliptischer Vektor* zu erwarten, dessen Hauptachsen A und B längs der Y-, bezüglicherweise längs der Z-Ache liegen, deren Quotient, wie schon erwähnt:

$$\frac{B}{A} = \frac{n \sin \varphi_1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}}$$

ist; während der Winkel zwischen der Längsachse des Kompensators und der Halbachse A, nämlich α gleich Null ist.

Die *hier* beobachteten, zerstreuten Strahlen liegen alle in der XZ-Ebene und die Projektion dieses erregenden, sekundären elliptischen Vektors auf die Normalebene des jeweiligen zerstreuten Strahles wird also ebenfalls im Allgemeinen ein Ellipse sein, deren zur Y-Ache parallele Halbachse für jeden solchen zerstreuten Strahl direkt proportional der A Halbachse bleibt, während die in der jeweiligen Zerstreuungsebene liegende Halbachse dieser Projektion ebenso proportional dem Produkte $B.\sin \omega_N$ ist, wobei ω_N den Winkel zwischen dem zerstreuten Strahl und

der Normalen N der berußten Ebene in Luft bedeutet. Diese beiden Hauptachsen der Projektionsellipse sind aufeinander senkrecht; ihr Quotient ist daher:

$$\frac{n \sin \varphi_1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \varphi_1 - 1}} \sin \omega_N = \operatorname{tg} K_{\text{calc.}};$$

während auch hier: $\alpha_{\text{calc.}} = 0$.

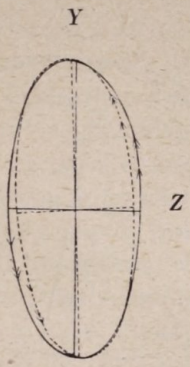
Rechnet man nun in dieser Weise die theoretisch zu erwartenden elliptischen Vektoren der zerstreuten Strahlen und vergleicht ihre charakterischen Daten mit den aus der Beobachtung gefundenen, in der Tafel I. enthaltenen, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Tafel II.

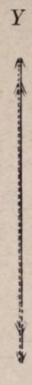
ϑ_N	ω_N	ε	$\alpha_{\text{obs.}}$	$\alpha_{\text{calc.}}$	tg $K_{\text{obs.}}$	tg $K_{\text{calc.}}$
−90°·0	15°·0	−79°·2	+ 5°·9	0°·0	0·4324	0·3910
+90°·0	15°·0	+85°·3	+ 2°·6	0°·0	0·4341	0·3910
−90°·0	30°·0	−78°·7	+14°·9	0°·0	0·6766	0·7554
+90°·0	30°·0	+85°·9	+ 7°·8	0°·0	0·6657	0·7554
−90°·0	45°·0	−78°·7	+43°·4	0°·0	0·8200	1·068
+90°·0	45°·0	+87°·1	−37°·9	0°·0	0·9496	1·068
−90°·0	60°·0	−80°·4	−14°·1	0°·0	1·431	1·309
+90°·0	60°·0	+89°·8	− 0°·5	0°·0	1·314	1·309
−90°·0	75°·0	−78°·8	−11°·5	0°·0	1·650	1·460

Es möge bemerkt werden, daß die Umlaufsrichtung der theoretisch erwarteten Vektoren überall dasselbe Vorzeichen hat, wie das durch ε angedeutete; ferner sind die Quotienten der Hauptachsen also tg $K_{\text{obs.}}$ und tg $K_{\text{calc.}}$ in genügender Übereinstimmung; die Übereinstimmung zwischen $\alpha_{\text{obs.}}$ und $\alpha_{\text{calc.}}$ ist an mehreren Stellen sehr gut, an anderen aber zeigt sich ein bedeutender Unterschied.

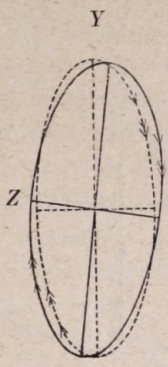
Indess wird sofort gezeigt, dass dieser letztere Umstand hier von ganz geringer Bedeutung ist, denn wo solche größere Abweichungen in α auftreten, sind die betreffenden Ellipsen sehr näherungsweise kreisförmig, wobei die Richtung der Hauptachsen in der Ellipsenebene fast ganz nebensächlich ist und den Charakter des ganzen Vektors nur unvesentlich beeinflußen kann.



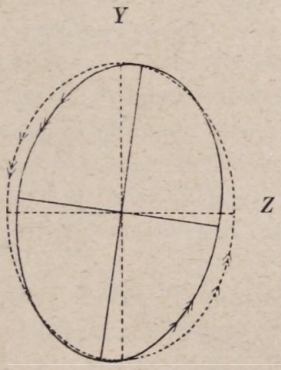
Figur 7.



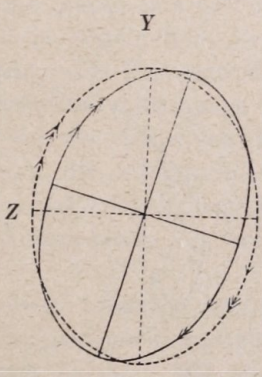
Figur 5.



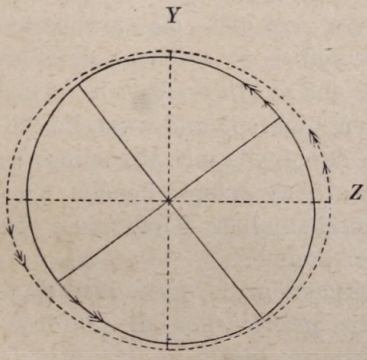
Figur 6.



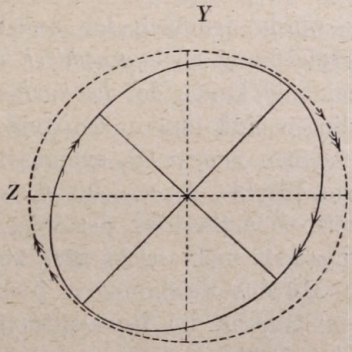
Figur 9.



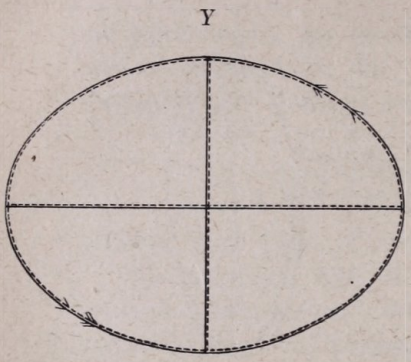
Figur 8.



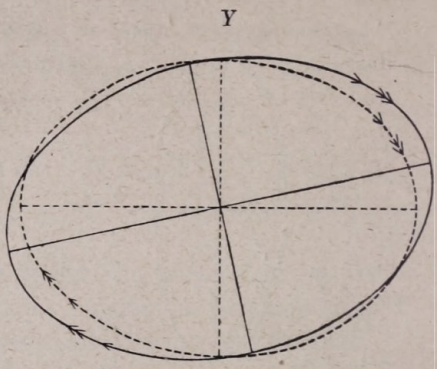
Figur 11.



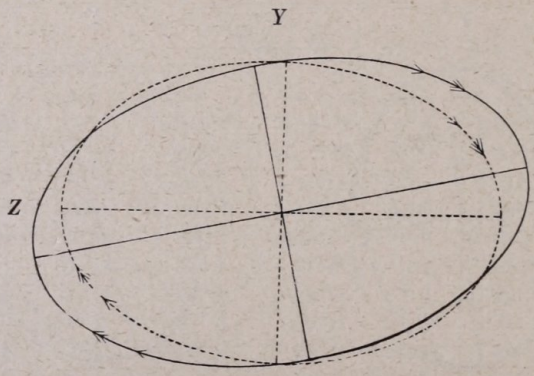
Figur 10.



Figur 13.



Figur 12.



Figur 14.

Es wurde demnach für zweckmäßig erachtet, die gewünschte Vergleichung auch *graphisch* anschaulich zu machen; die Formen und Lagen der *beobachteten* und der *theoretischen* Vektorellipsen sind nun in den folgenden Figuren, und zwar im Allgemeinen *paarweise,* symmetrisch dargestell, mit Ausnahme des dem Strahle $\vartheta_N = -90°{\cdot}0$, $\omega_N = 75°{\cdot}0$ entsprechenden symmetrischen Strahles, der wegen mechanischer Hindernisse des Apparates nicht beobachtet werden konnte.

In den Zeichnungen 5—14 bedeuten die *ganz ausgezogenen* Ellipsen die *beobachteten,* die *gestrichelten* die *theoretischen* Vektor-Formen.

Zeichnung 5 entspricht dem Strahle $\vartheta_N = \pm 90° \cdot 0$, $\omega_N = 0$; derselbe hat also die Richtung der Normale der berußten Ebene, und der Beobachter, dessen Auge sich in dieser Normale befindet und gegen 0 sieht, findet, daß dieser Strahl linear polarisiert ist und sein Vektor parallel zur Y-Achse, also parallel zur longitudinalen Komponente des sekundären, erregenden Lichtvektors schwingt; die Angaben *dieses* Strahles sind nicht in den Tabellen enthalten, weil in diesem Falle der beobachtete und theoretische Vektor ohnehin zusammenfallen.

Die übrigen Figuren 6—14 gehören zu den neun Strahlen der Tabelle II., ihre Reihenfolge ist dieselbe; Figur 14 hat aus oben erwähntem Grunde kein zugehöriges symmetrisches Paar.

Man sieht, daß diese anschauliche Zusammenstellung die Theorie, — soweit es sich hier um sehr empfindliche Erscheinungen handelt, — sehr gut verifiziert; die Übereinstimmung ist in bezug der wesentlichen Eigenschaften vollkommen genügend; die Abweichungen sind sogar in den äußersten Fällen noch immer mäßig; dieselben können die *allgemeine* Übereinstimmung nicht zweifelhaft machen bei solchen Erscheinungen, die oft schwierig und nicht immer genau zu beobachten sind.

In allen diesen Projektionsvektoren bemerkt man, dass darin die Komponente, die von der longitudinalen Komponente des erregenden sekundären Lichtvektors herrührt, die längs Y gezeichnet ist, gleiche Größe und gleiche Richtung hat.

Insoferne man daher eine Schlußfolgerung aus diesen beobachtbaren und beobachteten Erfahrungstatsachen ziehen kann, muß festgestellt werden, daß der Lichtvektor des bei Totalreflexion in das optisch dünnere Mittel eingedrungenen Strahles in Wirklickeit mittels der Formeln X_d, Y_d, Z_d in (3) des § 2 dargestellt wird; daß sich also dessen *longitudinale Komponente* Y_d in ganz unzweifelhafter, durch Beobachtungen erhärteter, sogar quantitativer Weise *nachweisen* läßt.

Anmerkung: Man bemerkt sofort, daß obige Untersuchung insoferne verallgemeinert werden kann, als man das einfallende Lichtbündel im Allgemeinen als elliptisch polarisiert annehmen, bezüglicherweise solches zur Herstellung der Erscheinung be-

nützen kann; es tritt dann im hier betrachteten gebrochenen Strahle zu den beiden Vektorkomponenten Y_d und Z_d noch X_d hinzu und dadurch wird der erregende, sekundäre, elliptische Vektor sowohl seiner Ebene, seiner Lage, seiner Form nach geändert.

Kurzer Literaturnachweis: Name und Erscheinungsort.

Abhandlungen:

Woldemar Voigt: Annalen der Physik und Chemie (III) Bd. 67, 1899, p. 185—200.

E. Ketteler: Ann. d. Ph. u. Ch. (III) Bd. 67, 1899, p. 879—893.

W. Voigt: Ann. d. Ph. u. Ch. (III) Bd. 68, 1900, p. 135—136.

Elmer E. Hall: Physical Review Vol. XV., 1902, p. 73—106.

Clemens Schäfer und Gustav Gross: Ann. d. Ph. (IV) Bd. 32. 1910, p. 648—672.

W. Voigt: Ann. d. Ph. (IV) Bd. 34, 1911, p. 797—800.

A. Eichenwald: Ann. d. Ph. (IV) Bd. 35, 1911, p. 1037—1040.

W. Voigt: Ann. d. Ph. (IV) Bd. 36, 1911, p. 866—870.

W. v. Ignatowsky und E. Oettinger: Ann. d. Ph. (IV) Bd. 37, 1912, p. 911—922.

A. Eichenwald: Festschrift Heinrich Weber gewidmet, 1912, p. 37—56.

August Wiegrefe: Ann. d. Ph. Bd. 45, 1914, p. 465—480.

S. Boguslawsky: Physikalische Zeitschrift, Bd. 12, 1912, p. 393—397.

Buchwerke:

G. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Optik. 1891, p. 147—154.

W. Voigt: Kompendium der theoretischen Physik, Bd. II., 1896, p. 641—643.

P. Drude: Lehrbuch der Optik., III. Auflage, 1912, p. 281—288.

A. Winkelmann: Handbuch der Physik, II. Auflage, VI. Bd. Optik 1906. p. 1272—1278.

Robbert W. Wood: *Physical Optics*, II. Auflage, 1911, p. 371—374.

M. v. Laue: Wellenoptik; Paul S. Epstein: Spezielle Beugungsprobleme. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. V_3, Heft 3, 1915, p. 359—487, 488—525.

2.

EIN REZIPROZITÄTSSATZ IN DER PHYSIKALISCHEN OPTIK.

Von Dr. I. FRÖHLICH,

O. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BUDAPEST.

(Sehr gekürzter Auszug einer, der III. Klasse der Ung. Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 13. Juni 1916 vorgelegten Abhandlung. *

§. 1. *Historisches.* Im Jahre 1905. erschien von H. A. LORENTZ[2] eine Abhandlung, die sich ihrem Titel nach auf Wärmestrahlung in einem System von Körpern von überall gleicher Temperatur bezog. Darin wird ein allgemeiner Satz in umständlicher Weise, mittels nicht ganz einfachen, die Vektorenrechnung beanspruchenden mathematischen Apparates bewiesen, der dann in verschiedenen Fällen sich etwas vereinfacht und in die folgende Gleichung übergeht:

$$(1) \qquad \int \{\mathfrak{E}'_e . \mathfrak{C} - (\mathfrak{H}'_e . \dot{\mathfrak{B}})\} dS = \int \{(\mathfrak{E}_e . \mathfrak{C}') - (\mathfrak{H}_e . \dot{\mathfrak{B}}')\} dS.$$

Hier bedeuten für einen Punkt P: $\mathfrak{E}_e$ die elektrische (elektromotorische) Kraft; $\mathfrak{C}$ den elektrischen (diëlektrischen) Strom; $\mathfrak{H}_e$ die magnetische (magnetomotorische) Kraft und $\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion; dS ein Volumelement bei P; ferner für

---

[1] Erschien ungarisch unter dem Titel: «*A physikai optika egy viszonossági tételéről*». Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der W.), Band XXXVI. (Budapest, 1918.) S. 193—265.

[2] «*Over de warmtestraling in een stelsel lichamen van overal gelijke temperatuur.*» Koninglijke Akademie van Wetenshapen te Amsterdam. Verslaag van de gevone Vergadering der Wiss-en Naturkundige Afdeeling. Deel XIV. 1.ste Gedeelte. (Amsterdam, 1905), p. 345—360.

einen anderen Punkt P': $\mathfrak{E}'$; $\mathfrak{C}'$; $\mathfrak{H}'_e$; $\mathfrak{B}'$; dS' die zugehörigen Größen.

Man setze nun mit LORENTZ voraus, daß in den Ausdrücken der elektrischen und der magnetischen Kraft nur die mit der reciproken *ersten* Potenz des Abstandes $\overline{OP}=r$ proportionalen Glieder beibehalten sind, und beziehe obige Gleichung auf den Fall, daß eine elektromotorische oder eine magnetomotorische Kraft *allein* innerhalb eines unendlich kleinen Raumes S wirkt. Besteht nun in einem solchen, an dem Punkte P liegendem Raum S eine elektromotorische Kraft $\mathfrak{a}.e^{\text{int}}$, worin $\mathfrak{a}$ einen reellen Vektor bedeutet, welche Kraft in allen Punkten von S dieselbe Richtung und dieselbe Größe $|\mathfrak{a}|$ hat, dann bedeutet dies, daß in dem Punkte P eine elektromotorische Wirkung von der Richtung h besteht, worin die Amplitude und die Phase durch den reellen Teil von $|\mathfrak{a}|Se^{\text{int}}$ bestimmt ist; man stelle diese Wirkung durch das Zeichen dar:

$$\mathfrak{a}.Se^{\text{int}}.$$

Ebenso, wenn im Punkte P eine magnetomotorische Wirkung besteht, die durch diesen Ausdruck angegeben wird, so hat dies eine, mit dem Vorhergehenden durchaus analoge Bedeutung.

Aus obiger Gleichung (1) lassen sich einige Sätze folgern:

a) Nehmen wir an, es sei überall: $\mathfrak{H}_e = 0$ und $\mathfrak{H}'_e = 0$; also, daß im ersten Falle ($\mathfrak{H}_e = 0$) eine elektromotorische Wirkung $\mathfrak{a}Se^{\text{int}}$ im Punkte P in der Richtung h besteht, während im zweiten Falle ($\mathfrak{H}'_e = 0$) im Punkte P' die elektromotorische Wirkung $\mathfrak{a}'S'e^{\text{int}}$ in der Richtung h' besteht. Dann reduzieren sich die beiden Seiten von (1) zu Integralen über die beiden unendlich kleine Räume S und S'; man findet nämlich, wenn man den elektrischen Strom, der im ersten Fall in P' besteht, durch $\mathfrak{C}_{P'}$, und den Strom, der im zweiten Fall in P besteht, durch $\mathfrak{C}'_P$ bezeichnet,

$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{C}_{P'})\ S' = (\mathfrak{a}\mathfrak{C}'_P)\,S,$$

und daher, wenn man

$$|\mathfrak{a}|S = |\mathfrak{a}'|S'$$

voraussetzt:

$$\mathfrak{C}_{h'P'} = \mathfrak{C}'_{hP}. \tag{2}$$

Ist nun

$$\mathfrak{C}_{h'P'} = \mu e^{i(nt+\nu)}; \quad \mathfrak{C}'_{hP} = \mu' e^{i(nt+\nu')},$$

dann folgt aus der Gleichheit beider Größen: $\mu' = \mu$ und $\nu' = \nu$.

Dieser Satz hat nun die folgende Bedeutung:

Wenn eine elektromotorische Wirkung, die in einem Punkte P in der Richtung h stattfindet, in einem Punkte P' einen Strom zuwege bringt, dessen Komponente längs einer willkürlichen Richtung h' die Amplitude μ und die Phase ν hat: dann wird eine elektromotorische Wirkung in P' in der Richtung h', wenn dieselbe mit der soeben genannten elektromotorischen Wirkung in Amplitude und Phase übereinstimmt, im Punkte P einen Strom erzeugen (erregen), dessen Komponente längs der Richtung h *genau dieselbe Phase und dieselbe Amplitude* hat.

b) Nehmen wir jedoch an, es sei überall $\mathfrak{E}'_e = 0$ und $\mathfrak{H}_e = 0$, und besteht im ersten Falle ($\mathfrak{E}'_e = 0$) im Punkte P dieselbe elektromotorische Wirkung in der Richtung h, die wir soeben in *a)* voraussetzten, hingegen im zweiten Falle ($\mathfrak{H}_e = 0$) im Punkte P' in der Richtung h' eine magnetomotorische Wirkung $\mathfrak{a}' S' e^{int}$, dann ist:

$$-(\mathfrak{a}' \dot{\mathfrak{B}}_{P'}) S' = (\mathfrak{a} \mathfrak{C}'_P) S;$$

also, wenn man noch

$$|\mathfrak{a}| S = |\mathfrak{a}'| \cdot S'$$

voraussetzt:

$$-\dot{\mathfrak{B}}_{h'P'} = \mathfrak{C}'_{hP}. \tag{3}$$

Dies sind die Formen die LORENTZ seinem Satze gibt. Es scheint, daß die nicht eben ganz einfache Beweisführung des Satzes (1) und der Umstand, daß seine Arbeit nur in holländischer Sprache erschien, die Ursache waren, daß der Satz keine allgemeinere Vorbereitung gefunden hat.

Acht Jahre später hat P. SELÉNYI[1] diesen Reziprozitätssatz

[1] *Sur l'existence et l'observation des ondes lumineuses sphériques inhomogènes.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Paris, 1913. No. 25., p. 1408—1410. (Tome 157.), Séance du 22. Décembre 1913. Über diese Frage hielt derselbe Verfasser, nämlich SELÉNYI, unter dem Titel: «*Gömbalakú inhomogén fényhullámokról*» (Über kugelförmige, inhomogene Lichtwellen) einen Vortrag in der *Mathematikai és Physikai Társulat* (Ungarische Mathematische und Physikalische Gesellschaft) den 29 Januar 1914.

anzuwenden versucht für den Fall, wenn punktförmige Lichtquellen sich in sehr geringer Entfernung von der Grenzfläche zweier durchsichtiger Medien befinden, um die dann entstandenen Srahlensysteme zu untersuchen; dabei benützte er auch die Resultate der wohlbekannten Theorie der Totalreflexion.

Jedoch erwähnte dieser Verfasser nirgend, weder in der angeführten Publikation, noch im mündlichen Vortrage die Quelle, aus welcher er die Kenntnis des Satzes schöpfte, er drückt seinen Inhalt nicht präzis aus, entwickelt seine versuchte Theorie nicht bis zur Darstellung brauchbarer Ausdrücke und spricht auch nicht von wesentlich neuen Erscheinungen, noch von anzuwendenden neuen Messungsmethoden oder von Beobachtungsdaten.

Durch SELÉNYIS Mitteilung veranlaßt, beschäftigte sich L. MANDELSTAM,[1] damals in Straßburg, mit derselben Frage; er versuchte die oben erwähnte Theorie in vollkommenerer Weise, zu entwickeln und gab für einige reale Fälle entsprechende brauchbare Formeln. Auch MANDELSTAM versucht die oben angeführten Reziprozitätsätze zu beweisen; indeß unterscheidet sich seine Beweisführung von LORENTZS nicht wesentlich, wenn nicht durch ihre außerordentliche Kürze, die die Beweisführung fast unverständlich macht.

§. 2. Wir wollen nun hier kurz zeigen, dass zur Beweisführung der in (2) und (3) angeführten einfachen Reziprozitätssätze die ganze Entwickelung bis zur Gleichung (1) überflüssig ist, und daß dazu auch die gewöhnlichen, allgemein bekannten Eigenschaften der einfachsten Lichtvektoren genügen.

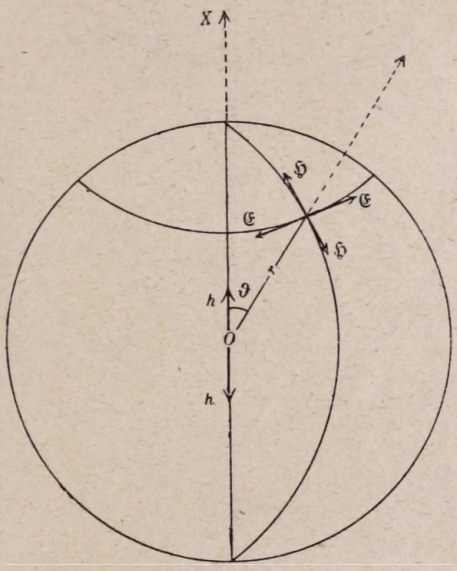
Benützt man die Vorstellungen und Beziehungen der elektromagnetischen Lichttheorie, so kann man die bekannten, einfachsten Lösungen der Gleichungen dieser Theorie, wenn man nur die, mit der reziproken ersten Potenz von r proportionalen Glieder beibehält, als folgende zwei Haupttypen ihrer Vektoren ansetzen (Figur 1 und 2).

Es sei O der punktförmige Erregungsort einer einfach har-

---

[1] *Strahlung einer Lichtquelle, die sich sehr nahe an der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien befindet.* Physikalische Zeitschrift XV. Jahrgang, Nr. 5., 1. März 1914, p. 220—225.

monischen, elektrischen oder magnetischen *erregenden* Schwingung, die längs der Geraden *hh* stattfindet; P der im Abstande $\overline{OP} = r$ von O befindliche Punkt des homogenen isotropen Mediums, in welchem infolge der Erregung der elektrische Vektor $\mathfrak{E}$ und der magnetische Vektor $\mathfrak{H}$ entsteht; ϑ der Winkel zwischen *hh* und $\bar{r}$; ε und μ die diëlektrische, bezüglicherweise magnetische Konstante des Mediums; A, bezüg-



Figur 1.

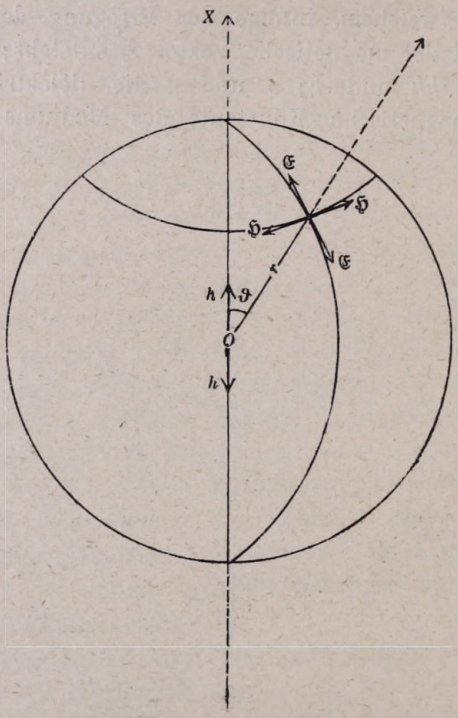
licherweise B die Amplitude der *erregten* elektrischen Schwingung in der Einheit der Entfernung r, bei $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$; T die Zeitperiode, λ die Wellenlänge, $2\pi\delta$ die Anfangsphase der Vektoren, und

$$\psi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta\right). \tag{4}$$

Erster Typus (Figur 1):

$$\mathfrak{E} = \frac{A}{r}\sin\vartheta\sin\psi; \quad \mathfrak{H} = \frac{A}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\vartheta\sin\psi. \tag{5}$$

Dieser stellt für $\mathfrak{E}$ ein um *hh zirkumaxiales elektrisches*, für $\mathfrak{H}$ ein in bezug auf *hh meridionales magnetisches* Véktoren-



Figur 2.

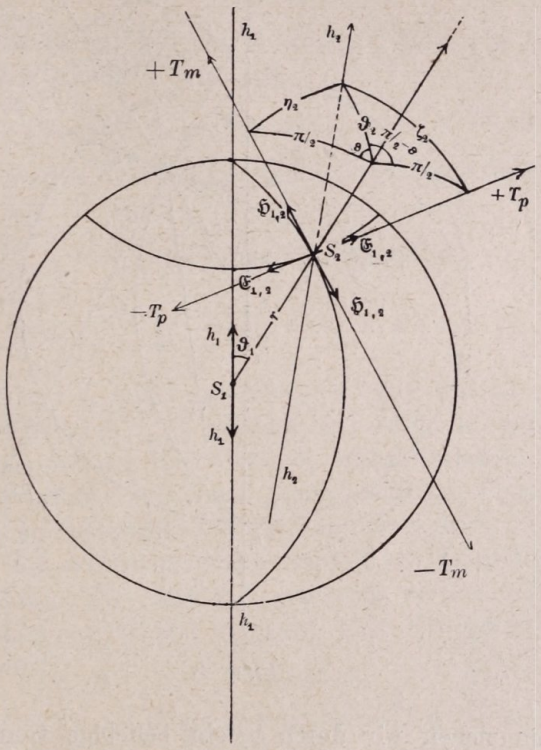
system dar; dieses System entsteht, wenn die *erregende* Schwingung in *O* längs *hh* eine *magnetische* ist.

Zweiter Typus (Figur 2):

$$(6) \qquad \mathfrak{E} = \frac{B}{r} \sin\vartheta \sin\psi; \quad \mathfrak{H} = \frac{B}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin\vartheta \sin\psi.$$

Dieser stellt für $\mathfrak{E}$ ein in bezug auf *hh meridionales elektrisches*, für $\mathfrak{H}$ ein um *hh zirkumaxiales magnetisches* Vektorensystem dar; dieses System entsteht, wenn die *erregende* Schwingung längs *hh* eine *elektrische* ist.

§. 3. Diese beiden Typen sollen nun zum Zwecke unserer Beweisführung in den Figuren 3 und 4 zugrunde gelegt werden.

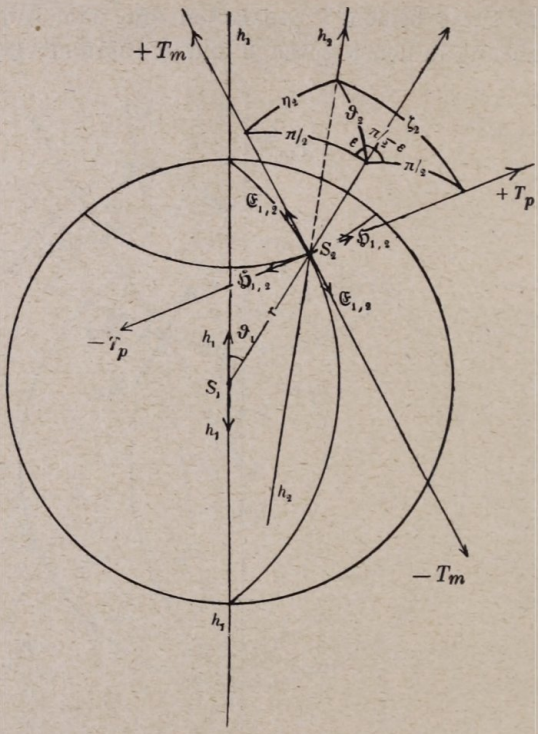


Figur 3.

Es genügt, wenn wir im Erregungsort eine lineare, einfach harmonische *elektrische* Schwingung voraussetzen und dabei Figur 4 zum Ausgangspunkt nehmen.

a) Die *erregende* Schwingung finde in S_1 längs $\overline{h_1 h_1}$ statt; die *erregten* Schwingungen im Punkte S_2; es bezeichne diese letzteren Schwingungen nach (6);

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_{1,2} = \dfrac{A_1}{r} \cdot \sin\vartheta_1 \sin\psi_1; \qquad \mathfrak{H}_{1,2} = \dfrac{A_1}{r} \cdot \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sin\vartheta_1 \sin\psi_1; \\ \text{wobei:} \\ \qquad\qquad \psi_1 = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{\lambda} + \delta_1\right). \end{array} \right.$$



Figur 4.

Nun ziehen wir durch S_2 ein beliebige Gerade $\overline{h_2 h_2}$ und suchen die Komponente von $\mathfrak{E}_{1,2}$ und von $\mathfrak{H}_{1,2}$ längs $\overline{h_2 h_2}$; diese sind, der Zeichnung gemäß:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{1,h_2} = \dfrac{A_1}{r} \sin\vartheta_1 \cos\eta_2 \cdot \sin\psi_1 ; \\ \mathfrak{H}_{1,h_2} = \dfrac{A_1}{r} \cdot \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sin\vartheta_1 \cos\zeta_2 \sin\psi_1 ; \end{cases}$$

dabei ist η_2, bezüglicherweise ζ_2 der Winkel zwischen $\overline{h_2 h_2}$ und $\mathfrak{E}_{1,2}$, bezw. $\mathfrak{H}_{1,2}$.

Es bezeichne ferner ϑ_2 den Winkel zwischen $\overline{h_2 h_2}$ und der positiven Richtung von r; ebenso ε den Winkel zwischen den Ebenen $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$ und $(h_2 S_2 r)$; und da die Ebenen $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$

und $(\mathfrak{H}_{1,2} S_2 r)$ aufeinander senkrecht sind, so muß auch der Winkel zwischen den Ebenen $(\mathfrak{H}_{1,2} S_2 r)$ und $(h_2 S_2 r)$ gleich $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ sein.

Bei Beachtung, daß die Geraden r, $\mathfrak{E}_{1,2}$, $\mathfrak{H}_{1,2}$ gegenseitig auf einander senkrecht sind, gilt:

$$\cos \eta_2 = \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon; \quad \cos \zeta_2 = \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon; \tag{9}$$

demnach können die oberwähnten Komponenten (8) geschrieben werden:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_{1,h_2} = \dfrac{A_1}{r} \cdot \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varepsilon \sin \psi_1; \\ \mathfrak{H}_{1,h_2} = \dfrac{A_1}{r} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varepsilon \sin \psi_1. \end{cases} \tag{10}$$

Die Figur 4 zeigt außerdem, daß der Winkel ε von den Ebenen der Winkel ϑ_1, ϑ_2 gebildet ist, weil die Ebenen $(\mathfrak{E}_{1,2} S_2 r)$ und $(h_1 S_1 S_2)$ mit der Ebene von ϑ_1 zusammenfallen.

b) Es befinde sich nun, gemäß derselben Figur 4, in S_2 eine andere, elektrische, punktförmige, *erregende* Schwingung, die längs $\overline{h_2 h_2}$ alterniert; dann wird diese Erregungsquelle in S_1 die Vektoren $\mathfrak{E}_{2,1}$ und $\mathfrak{H}_{2,1}$ erzeugen, welche, weil r mit der Geraden $h_2 h_2$ den Winkel ϑ_2 bildet, nach (6) geschrieben werden können:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_{2,1} = \dfrac{A_2}{r} \cdot \sin \vartheta_2 \sin \psi_2; \quad \mathfrak{H}_{2,1} = \dfrac{A_2}{r} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2; \\ \text{wobei} \qquad \psi = 2\pi \left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{r}{\lambda} + \delta_2 \right), \end{cases} \tag{11}$$

und die Oszillationen von $\mathfrak{E}_{2,1}$ und $\mathfrak{H}_{2,1}$ meridional, bezüglicherweise zirkumaxial in bezug auf die Gerade $\overline{h_2 h_2}$ als Symmetrieachse stattfinden.

Bildet man ferner die Komponenten von $\mathfrak{E}_{2,1}$ und $\mathfrak{H}_{2,1}$ längs der Geraden $\overline{h_1 h_1}$, die mit r den Winkel ϑ_1 bildet, während der Winkel zwischen den Ebenen von ϑ_1 und ϑ_2 wieder ε ist, so findet man ganz nach dem Vorgang in *a)*:

$$\begin{aligned} \cos (\overline{h_1 h_1}, \mathfrak{E}_{2,1}) &= \sin \vartheta_1 \cos \varepsilon; \\ \cos (\overline{h_1 h_1}, \mathfrak{H}_{2,1}) &= \sin \vartheta_1 \sin \varepsilon; \end{aligned} \tag{12}$$

so daß die gedachten Komponenten:

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{2,h_1} = \dfrac{A_2}{r} \cdot \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_1 \cos\varepsilon \sin\psi_2; \\ \mathfrak{H}_{2,h_1} = \dfrac{A_2}{r} \cdot \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_1 \sin\varepsilon \sin\psi_2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke hätte man sofort aus (10) durch gegenseitiges Vertauschen der Indizes 1 und 2 erzeugen können.

c) Setzen wir schließlich noch voraus:

$$(14)\qquad A_1 = A_2 \quad \text{und} \quad \delta_1 = \delta_2;$$

also, daß *Amplitude* und *Anfangsphase* der beiden Erregungsquellen einander gleich seien, dann gilt nach (10) und (13).

$$(15)\qquad \mathfrak{E}_{1,h_2} = \mathfrak{E}_{2,h_1}; \quad \mathfrak{H}_{1,h_2} = \mathfrak{H}_{2,h_1}.$$

In Worten: zwei erregende Vektoren, die an den beiden Endpunkten S_1 und S_2 der Graden $\bar{r}$ längs den Geraden $\overline{h_1 h_1}$, bezüglicherweise $\overline{h_2 h_2}$ mit gleicher Amplitude und gleicher Phase alternieren, erzeugen bezüglicherweise in S_2 längs $\overline{h_2 h_2}$ und in S_1 längs $\overline{h_1 h_1}$ je zwei Vektoren von entsprechend gleicher Amplitude und Phase.

Dies ist der gesuchte Reziprozitätsatz in seiner einfachsten Form. —

Es ist ohne Weiteres ersichtlich, daß man ebensogut bei Zugrundelegung einer erregenden magnetischen Schwingung aus Figur 3 dieselbe Beweisführung vollziehen kann; der Satz ist derselbe.

Er gilt allgemein für einfach harmonische, erregende Schwingungen, mögen dieselben elektromagnetische oder elastischfeste sein.

1. *Anmerkung.* Im ungarischen Originale ist noch ausführlich nachgewiesen, daß dieser Satz auch dann strenge gilt, wenn man in den Lösungen der Differentialgleichungen der Lichttheorien auch diejenigen Glieder mitberücksichtigt, die bei *kleinen* Entfernungen r, jedoch von *endlicher* Größenordnung auftreten; dabei ist vorausgesetzt, daß sich beide Lichtquellen S_1 und S_2 im selben homogenen isotropen Medium befinden.

2. *Anmerkung.* Im zweiten Teil des ungarischen Originales (p. 233—265) wird dieser Satz auch für den Fall einfach und strenge bewiesen, wenn die beiden Lichtquellen in bezüglicherweise verschiedenen homogenen und isotropen Medien sich befinden. Zahlreiche Anwendungen des Satzes illustrieren die Fälle, wenn eine Kugelfläche die beiden Medien trennt und die beiden Lichtquellen auf der Geraden irgend eines Radiusses liegen.

Schließlich behandelt der Verfasser allgemein den Fall, wenn die Trennungsfläche der beiden Medien eine Ebene ist und die zwei Lichtquellen sich in beliebiger, im Verhältnis zu r großer oder in solcher Entfernung befinden, welche von derselben Größenordnung, wie λ ist.

Jedoch stehen die ungünstigen äußeren Umstände selbst der auszugsweisen Übersetzung dieses Teiles der Abhandlung im Wege.

3. *Anmerkung.* Es möge hier noch besonders hervorgehoben werden, daß der oben betrachtete Reziprozitätssatz durchaus nicht notwendig ist, um die Theorie derjenigen Lichtwellen zu entwickeln, die entstehen, wenn eine punktförmige Lichtquelle sich in beliebig großer oder beliebig (jedoch nicht unendlich) kleiner Entfernung von der ebenen Trennungsfläche zweier homogenen, isotropen Medien befindet, wie dies P. Selényi und L. Mandelstam in ihren oben angeführten Arbeiten voraussetzen.

Die Ausbreitung, die Intensität und der Polarisationszustand solcher Wellen läßt sich mittels verhältnismäßig einfacher Betrachtungen und einfacherem mathematischen Apparat vollständig darstellen und man kann so praktische Formeln finden, die den Vergleich mit den Beobachtungen aller dieser Eigenschaften ermöglichen.

Diese Theorie entwickelte ich ausführlich, um sie auf sehr zahlreiche, hier zuerst angestellte experimentelle Untersuchungen anzuwenden; bisher konnte diese Arbeit nur in ungarischer Sprache erscheinen.[1]

---

[1] Fröhlich Izidor: «*Különböző törésű, átlátszó két közeg válaszfelülete közelségében lévő fénylő pontok elméletéhez.*» (Zur Theorie leuchten-

4. *Anmerkung.* Inbezug auf die weitere Literatur der Reziprozitätssätze möge bemerkt werden, daß solche hauptsächlich für *akustische Zwecke* behandelt werden; man sehe etwa A. WINKELMANNS Handbuch der Physik, Bd. II., zweite Auflage Akustik, p. 140—142. Leipzig, 1902.

---

der Punkte, die sich in der Nähe der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien von verschiedener Brechbarkeit befinden.) Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ung. Ak. d. W. den 15. Februar 1915. Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der Wiss.), Bd. XXXIV., (Budapest 1916), p. 453—517.

3.

UMWANDLUNG EINES PARALLELEN, LINEAR-POLARISIERTEN STRAHLENBÜNDELS MITTELS OPTISCHER LINSE IN EINEN KREISFÖRMIGEN STRAHLENKEGEL.

Von Dr. I. FRÖHLICH,

O. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BUDAPEST.

Vorgelegt der III. Klasse der Akademie in der Sitzung vom 6. Dezember 1920.*

Bei optischen Versuchen ist es oft nötig, ein paralleles Lichtbündel, dessen Strahlen sich in bestimmtem Polarisationszustande befinden, mittels eines optischen Linsensystemes oder eines sphärischen Spiegels in ein konvergentes oder divergentes Bündel umzuwandeln. Man pflegt es als selbstverständlich vorauszusetzen, daß eine solche Umwandlung den Polarisationszustand der Strahlen nicht verändert; die diesbezügliche Literatur gibt hierauf keinen Aufschluß. Die folgende einfache, aber strengere Untersuchung zeigt indeß, daß die erwähnte Umformung die Polarisation der Strahlen im merklichen Maße verändern kann.

Der allgemeine Fall ist, wenn die Strahlen eines paralellen Lichtbündels elliptisch polarisiert sind. Jedoch läßt sich dieser Fall stets in zwei einfachere zerlegen; der elliptische Lichtvektor kann immer durch zwei, auf einander senkrechte

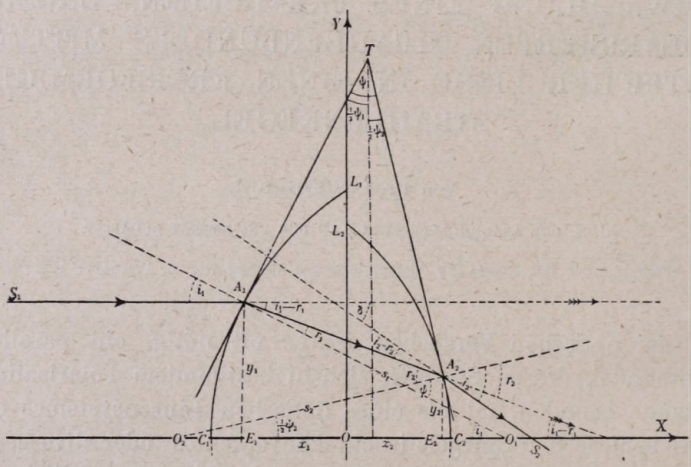
---

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: «*Poláros, párhuzamos fénysugárnyalábnak optikai lencsével való átalakítása köralakú sugárkúppá*». Mathematikai és Természettudományi Értesítő Bd. XXXVIII. (Budapest 1921.) S. 379—387.

lineare Vektoren ersetzt werden. Die sich ergebende, resultierende Veränderung des elliptischen Vektors ist daher stets mittels der Polarisationsänderung der beiden Komponenten darstellbar.

Es genügt demnach, ein solches einfallendes Strahlenbündel zu betrachten, das aus lauter linearpolarisierten, parallelen Strahlen besteht.

Es möge hier im vorhinein bemerkt werden, daß die Amplitude und das Azimut des Vektors eines solches Strahles durch



Figur 1.

Brechung und Durchgang durch eine Linse sich ändern können; hingegen bleibt seine Phase und der Karakter seiner Polarisation durch die Brechung unverändert.

Aber schon infolge dieser Eigenschaften können im elliptischen Vektor, nach Durchang durch die Linse gewisse Änderungen auftreten, deren Feststellung nicht ohne Interesse ist.

Wir begnügen uns, einen beliebigen Strahl $\overline{S_1 A_1}$ des einfallenden Bündels zu untersuchen. (Fig. 1.)

1. Allgemeines über die Azimutänderung eines zweimal gebrochenen Strahles. Es sei die Hälfte des Durchschnittes der Linse die ebene Figur $C_1 L_1 L_2 C_2 O C_1$; die gemeinsame Axe ihrer Kugeloberflächen sei die Symmetrie-Gerade $O_1 O O_2$; die Radien

der Letzteren seien $\overline{O_1A_1}=s_1$; $\overline{O_2A_2}=s_2$; der relative Brechungsindex der Linsensubstanz zur Luft sei n.

Die Richtung des einfallenden Strahlenbündels ist parallel zur Richtung O_1OO_2 der gemeinsammen Axe; die Verteilung der Strahlen um diese Axe sei symmetrisch.

Ein beliebig ausgewählter Strahl $\overline{S_1A_1}$ beschreibe der Figur gemäß den Weg $S_1A_1A_2S_2$, dessen einfache analytische und algebraische Darstellung aus dem Folgenden ersichtlich ist:

Der Strahl dringt bei A_1 in die Linse, tritt bei A_2 aus ihr und setzt seinen Weg in der Richtung $\overline{A_2S_2}$ fort.

Es sei ferner das *Schwingungsazimut* des Strahles $\overline{S_1A_1}$ an der Eintrittsstelle A_1 gleich α_{i_1}; das Schwingungsazimut des gebrochenen Strahles A_1A_2 an derselben Stelle, nämlich an der Brechungstelle A_1, jedoch schon in der Linsensubstanz, sei gleich α_{r_1}. Da hier die Ebene der Zeichnung gleichzeitig die Reflexions-, bezüglicherweise Refraktions-Ebene dieses Strahles ist von deren Normale ab die Azimute zu nehmen sind: so müssen die zur Einfallsebene senkrechte und die dazu parallele Vektorenkomponente *vor*, und *nach* der Brechung nach FRESNELS Formeln folgende Amplituden haben:

$$E_s \quad \text{und} \quad E_p;$$

$$D_s = \frac{2 \sin r_1 \cos i_1}{\sin (i_1+r_1)} \cdot E_s; \qquad D_p = \frac{2 \sin r_1 \cos i_1}{\sin (i_1+r_1) \cos (i_1-r_1)} E_p;$$

dabei bedeuten E_s und D_s, bezüglicherweise E_p und D_p die Amplitude der zur Einfallsebene senkrechten Vektorenkomponente des einfallenden und des durchgehenden (gebrochenen) Strahles, bezüglicherweise die Amplitude der zur Einfallsebene parallelen Vektorenkomponente des einfallenden und des durchgehenden Strahles, ferner i_1 den Einfallswinkel, r_1 den Brechungswinkel an der Eintritts- und Brechungsstelle A_1.

Man hat demnach:

$$\operatorname{tg}(\alpha_{i_1}) = \frac{E_s}{E_p};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_{r_1}) = \frac{D_s}{D_p} = \frac{E_s}{E_p} \cdot \cos(i_1-r_1) = \operatorname{tg}(\alpha_{i_1}) \cdot \cos(i_1-r_1).$$

Es ist noch zu bemerken, daß die lineare Alternierung des

Vektors des Strahles $\overline{S_1A_1}$ stets transversal zu diesem Strahle vor sich geht, während der Vektor des gebrochenen Strahles $\overline{A_1A_2}$ transversal zum eigenen Strahle alterniert. Der Austritt des Strahles $\overline{A_1A_2}$ aus der Linse erfolgt an der Stelle A_2; hier ist r_2 der Einfalls-, i_2 der Brechungswinkel; von der geringen Intensitätsänderung infolge der Absorption in der Linsensubstanz wollen wir absehen.

Es werden dann, an der Austrittsstelle A_2, und zwar diesseits und jenseits der brechenden Fläche, die Amplituden der zur Einfallsebene senkrechten und der dazu parallelen Vektorenkomponenten, vor und nach der Austrittsbrechung, gemäß den oben erwähnten FRESNELschen Formeln:

$$U_s = \frac{2 \sin i_2 \cos r_2}{\sin (r_2+i_2)} D_s; \qquad U_p = \frac{2 \sin i_2 \cos r_2}{\sin (r_2+i_2) \cos (r_2-i_2)} D_p;$$

$$\operatorname{tg} (a_{r_2}) = \operatorname{tg} (a_{r_1}) = \frac{D_s}{D_p} = \operatorname{tg} (a_{i_1}) \cos (i_1-r_1);$$

$$\operatorname{tg} (a_{i_2}) = \frac{U_s}{U_p} = \frac{D_s}{D_p} \cdot \cos (r_2-i_2);$$

also schließlich:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg} (a_{i_2}) = \operatorname{tg} (a_{i_1}) . \cos (i_1-r_1) . \cos (r_2-i_2);$$

und diese Gleichung zeigt die Größe der Azimutänderung $(a_{i_1} - a_{r_2})$ an, welche infolge des Durchganges des Strahles $\overline{A_1A_2}$ durch die Linsensubstanz und dessen zweimaliger Brechnng entstand.

2. Gang des Strahles durch eine dicke Linse (durch ein dickes Prisma). Bestimmung seines Weges.

Aus Fig. 1. ist sofort ersichtlich, dass der Weg des betrachteten Strahles $S_1A_1A_2S_2$ in der Linse genau derselbe ist, wie der Weg A_1A_2 durch das Prisma A_1TA_2, dessen brechende Ebenen die zu den Kugelflächen an den Punkten A_2, bezüglicherweise A_1 gezogenen Tangentenebenen sind.

Leicht läßt sich dieser Gang bestimmen.

Es seien s_1, s_2 die Radien der Kugelflächen der Linse;

x_1, y_1, die Koordinaten der Eintrittsstelle A_1; } bezogen auf das XY-
x_2, y_2, die Koordinaten der Austrittsstelle A_2; } System der Fig. 1.

Ferner seien C_1, C_2 die Scheitelpunkte dieser Kugelflächen; O_1, O_2 ihre Mittelpunkte; ψ der Brechungswinkel, den die beiden Tangentialebenen in T mit einander bilden; derselbe besteht der Figur gemäß aus zwei Teilen, so daß man setzen kann: $\psi = \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2$; ebenso ist:

$\overline{OC_1} = \frac{1}{2} D_1$ } die Dicke der beiden Kalotten der Linse; ihre
$\overline{OC_2} = \frac{1}{2} D_2$ } Summe ist:

$\overline{C_1 C_2} = \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2} D_2 = D =$ die ganze Dicke der Linse.

Das Problem kann nun folgendermaßen formuliert werden:

Gegebene Daten: Eintrittsazimut und Eintrittsstelle; a_{i_1}, $A_1(x_1, y_1)$; und damit auch i_1, denn es ist: $\sin i_1 = y_1 : s_1$; ferner $\frac{1}{2} D_1$; $\frac{1}{2} D_2$; s_1, s_2; $\frac{1}{2}\psi_1$, $\frac{1}{2}\psi_2$. Hier ist $\frac{1}{2}\psi_1 = i_1$ und

$$\tfrac{1}{2}\psi_2 = \measuredangle (A_2 O_2 E_2); \quad \sin(\tfrac{1}{2}\psi_2) = y_2 : s_2.$$

Gesuchte Daten: r_1, r_2; i_2; die Austrittsstelle $A_2(x_2, y_2)$; die Strahlenablenkung δ; schließlich das Austrittsazimut a_{i_2}.

a) Man hat nun unmittelbar aus Figur 1.:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \overline{A_1 A_2} . \cos(i_1 - r_1); \\ y_1 - y_2 &= \overline{A_1 A_2} . \sin(i_1 - r_1); \end{aligned}\right\}$$

und daraus:

$$\left.\begin{aligned} x_2^2 &= x_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} . x_1 \cos(i_1 - r_1) + \overline{A_1 A_2}^2 \cos^2(i_1 - r_1); \\ y_2^2 &= y_1^2 - 2\overline{A_1 A_2} . y_1 \sin(i_1 - r_1) + \overline{A_1 A_2}^2 \sin^2(i_1 - r_1); \end{aligned}\right\}$$

$$(2) \quad x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2\overline{A_1 A_2}\{x_1 \cos(i_1 - r_1) + y_1 \sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1 A_2}^2.$$

Es ist dies eigentlich das Gleichungssystem der Geraden $\overline{A_1 A_2}$.

Noch gilt hier der Zeichnung gemäß ohne weiteres:

$$i_1 = \measuredangle (A_1 O_1 O); \quad \sin i_1 = \frac{y_1}{s_1} = \sin(\tfrac{1}{2}\psi_1); \quad \sin r_1 = \frac{1}{n} \sin i_1;$$

demnach:

$$(3) \qquad \sin r_1 = \frac{1}{n} \sin \tfrac{1}{2}\psi_1; \quad \text{und} \quad i_1 - r_1 = \tfrac{1}{2}\psi_1 - r_1;$$

$$\cos r_1 = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\psi_1},$$

oder

$$(3_a) \qquad i_1 - r_1 = \tfrac{1}{2}\psi_1 - \text{arc.}\left\{\sin = \frac{1}{n}\sin\left(\tfrac{1}{2}\psi_1\right)\right\}.$$

b) *Benützung der Gleichung der vorderen Kugelfläche.* Nach Figur 1. gilt:

$$\overline{O_1A_1}^2 = \overline{O_1E_1}^2 + y_1^2 = (s_1 - \overline{C_1E_1})^2 + y_1^2 = (s_1 - [\tfrac{1}{2}D_1 - x_1])^2 + y_1^2 = s_1^2,$$

oder auch:

$$s_1^2 = s_1^2 - 2s_1[\tfrac{1}{2}D_1 - x_1] + (\tfrac{1}{2}D_1 - x_1)^2 + y_1^2;$$
$$0 = y_1^2 - s_1D_1 + 2s_1x_1 + \tfrac{1}{4}D_1^2 - D_1x_1 + x_1^2;$$

schließlich:

$$(\text{II}) \qquad x_1^2 + y_1^2 = +s_1D_1 - (2s_1 - D_1).x_1 - \tfrac{1}{4}D_1^2.$$

c) *Benützung der Gleichung der rückwärtigen Kugelfläche.* Nach Figur 1. gilt hier:

$$\overline{O_2A_2}^2 = \overline{O_2E_2}^2 + y_2^2 = (s_2 - \overline{C_2E_2})^2 + y_2^2 = (s_2 - [\tfrac{1}{2}D_2 - x_2])^2 + y_2^2 = s_2^2;$$

oder auch:

$$s_2^2 = s_2^2 - 2s_2[\tfrac{1}{2}D_2 - x_2] + (\tfrac{1}{2}D_2 - x_2)^2 + y_2^2;$$
$$0 = -s_2D_2 + 2s_2x_2 + \tfrac{1}{4}D_2^2 - D_2x_2 + x_2^2 + y_2^2,$$

schließlich

$$(\text{III}) \qquad x_2^2 + y_2^2 = +s_2D_2 - (2s_2 - D_2)x_2 - \tfrac{1}{4}D_2^2.$$

d) *Herstellung der Gleichung für* $\overline{A_1A_2}$.
Benützt man nun die Gleichung (2):

$$(2)\ x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2A_1A_2\{x_1\cos(i_1 - r_1) + y_1\sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1A_2}^2;$$

und setzt Geichung (II) und (III) hinein, so findet sich

$$s_2D_2 - (2s_2 - D_2)x_2 - \tfrac{1}{4}D_2^2 =$$
$$= s_1D_1 - (2s_1 - D_1)x_1 - \tfrac{1}{4}D_1^2 - 2\overline{A_1A_2}\{x_1\cos(i_1 - r_1) +$$
$$+ y_1\sin(i_1 - r_1)\} + \overline{A_1A_2}^2.$$

Hier ist x_1 von O gegen O_2, hingegen x_2 von O gegen O_1 positiv zu nehmen.

Es folgt daraus:

$$\text{(IV)}\quad \left.\begin{aligned} &\overline{A_1A_2}^2 - 2\overline{A_1A_2}\{x_1\cos(i_1-r_1)+y_1\sin(i_1-r_1)\} = \\ &= \tfrac{1}{4}(D_1^2-D_2^2)-(s_1D_1-s_2D_2)+\{(2s_1-D_1)x_1-(2s_2-D_2)x_2\}. \end{aligned}\right\}$$

Um nun $\overline{A_1A_2}$ zu bestimmen, und damit aus dem Gleichungssystem (1) auch x_2 und y_2, nehme man die Unbekannte x_2 etwa aus der ersten der Gleichungen (1):

$$x_2 = -x_1 + \overline{A_1A_2}\cdot\cos(i_1-r_1);$$

es wird somit aus (IV):

$$\text{(V)}\quad \left.\begin{aligned} &\overline{A_1A_2}^2 - 2\overline{A_1A_2}\{x_1\cos(i_1-r_1)+ \\ &+y_1\sin(i_1-r_1)-(s_2-\tfrac{1}{2}D_2)\cos(i_1-r_1)\} = \\ &= \tfrac{1}{4}(D_1^2-D_2^2)-(s_1D_1-s_2D_2)+\{2(s_1+s_2)-(D_1+D_2)\}x_1. \end{aligned}\right\}$$

Oder auch:

$$\text{(V)}\quad \left.\begin{aligned} &\overline{A_1A_2}^2 - 2\overline{A_1A_2}\{x_1\cos(i_1-r_1)+ \\ &+y_1\sin(i_1-r_1)-(s_2-\tfrac{1}{2}D_2)\cos(i_1-r_1)\} = \\ &= \tfrac{1}{4}(D_1^2-D_2^2)-(s_1D_1-s_2D_2)+\{(s_1+s_2)-D\}2x_1. \end{aligned}\right\}$$

Mittels dieser Gleichung zweiten Grades läßt sich die Länge der Strecke $\overline{A_1A_2}$ bestimmen und zwar aus den gegebenen Größen: s_1, s_2; D_1, D_2; i_1, n, x_1; von den beiden Wurzeln gilt diejenige, die dem Problem entspricht; nämlich die *positive*.

Wenn nun $\overline{A_1A_2}$ in dieser Weise aus (V) bestimmt ist, so läßt sich aus dem System (1) x_2 und y_2 ausdrücken; daraus ergibt sich

$$\sin(\tfrac{1}{2}\psi_2) = \frac{y_2}{s_2};\quad r_2 = \tfrac{1}{2}\psi_2 + i_1 - r_1;\quad \text{schließlich}\quad \sin i_2 = n\sin r_2.$$

Die prismatische Ablenkung des Strahles ist hier, wie aus Fig. 1. ersichtlich:

$$\text{(4)}\qquad \delta = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - \psi = i_2 - \tfrac{1}{2}\psi_2.$$

3. Vereinfachung im Falle einer symmetrischen Linse. Es ist dann:

$$s_1 = s = s_2; \quad \tfrac{1}{2}D_1 = \tfrac{1}{2}D = \tfrac{1}{2}C_1C_2 = \tfrac{1}{2}D_2;$$
$$i_1 = \tfrac{1}{2}\psi_1 = \tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{2}\psi_2;$$

es bleibt somit aus (V):

$$(V_a) \qquad \left.\begin{aligned} &\overline{A_1A_2}^2 - 2\overline{A_1A_2}\{x_1\cos(i_1-r_1) + \\ &+ y_1\sin(i_1-r_1) - (s-\tfrac{1}{2}D)\cos(i_1-r_1)\} = 2x_1(2s-D). \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt

$$(V_b) \qquad \left.\begin{aligned} &\overline{A_1A_2} = \{x_1 - (s-\tfrac{1}{2}D)\}\cos(i_1-r_1) + y_1\sin(i_1-r_1) \pm \\ &\pm\sqrt{2x_1(2s-D) + [\{x_1-(s-\tfrac{1}{2}D)\}\cos(i_1-r_1) + y_1\sin(i_1-r_1)]^2} \end{aligned}\right\}$$

Hier ist vom Doppelzeichen *jedenfalls* das + zu nehmen, um ein *positives* $\overline{A_1A_2}$ zu erhalten.

4. Weitere Vereinfachung für die Randstrahlen der symmetrischen Linse.

In diesem Falle ist, nach Figur 1., die Strecke $\overline{A_1A_2}$ von *sehr geringer Länge* und daher *konvergiert* auch x_1 und x_2 gegen die *Null;* jedoch geschieht die *Brechung* und *Ablenkung* des Strahles genau so, als ob derselbe durch ein am Rande der Linse gebildetes Prisma vom Kantenwinkel ψ gegangen wäre. Die Ablenkung ist auch hier dieselbe, wie am Ende des Punktes *2, d)* (4): $\delta = i_2 - \tfrac{1}{2}\psi$; diese erhält man aus den Beziehungen: $\sin r_1 = \dfrac{1}{n}\sin i_1$; $r_2 = \psi - r_1$; schließlich $\sin i_2 = n\sin r_2 = n\sin(\psi - r_1)$. Figur 2 stellt die Strahlengänge der Randstrahlen der.

5. Einige Beispiele für die zu erwartenden Änderungen des Polarisationsazimutes bei Durchgang von Randstrahlen durch symmetrische Linsen.

Das einfallende Lichtbündel sei, wie oben parallel zur Linsenaxe; die Einfalls- und Brechungsebene des jeweiligen Strahles enthält diesen Strahl und die Linsenaxe.

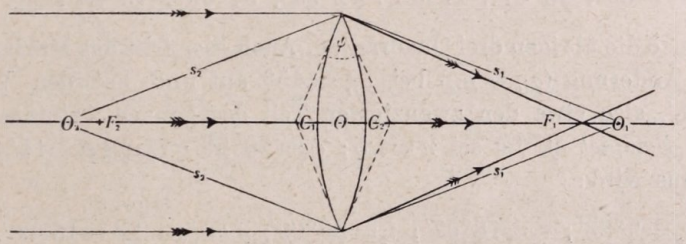
Dann gibt Gleichung (I) die Beziehung zwischen dem Einfallsazimut a_{i_1} und dem Austrittsazimut a_{i_2} des jeweiligen

Strahles, gerechnet von seiner jeweiligen Einfalls- und Reflexionsebene:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg}(a_{i_2}) = \operatorname{tg}(a_{i_1}) \cos(i_1 - r_1) \cos(r_2 - i_2).$$

Beispiel a): Es sei $n = 1{\cdot}5$; $\psi = 43°10'$; $i_1 = \frac{1}{2}\psi = 21°35'$; dann wird: $r_1 = 14°12'$; $r_2 = 28°58'$; $i_2 = 46°35'$; so daß $\delta = i_2 - \frac{1}{2}\psi = 25°00'$; die so gebrochenen Randstrahlen bilden einen Strahlenkegel mit der Spitze F_1, dessen Öffnung 50° beträgt; jeder einzelne Strahl bildet mit der Axe den Winkel 25°00'.

Nimmt man nun eine Reihe symmetrisch um diese Axe gelegener Randstrahlen, deren Vektoren jedoch im parallelen



Figur 2.

Strahlenbündel, parallel zur Zeichnungsebene alternieren, so findet man aus (I) für:

$a_{i_1} = 0°00'$; $15°00'$; $30°00'$; $45°00'$; $60°00'$; $75°00'$; $90°00'$;

die Werte:

$a_{i_2} = 0°00'$; $14°13'$; $28°37'$; $43°23'$; $58°35'$; $74°31'$; $90°00'$.

Diese Zahlen beziehen sich auf einen Quadranten des Randteiles (der Mantelfläche) des hier betrachteten einfallenden Bündels; ebensolche Zahlen gelten für die übrigen drei Quadranten. Sucht man demnach den Azimut-Unterschied zwischen dem Vektor des längs der Linsenaxe fortschreitenden Strahles und dem eines beliebigen, längs der Mantelfläche des Bündels schreitenden Strahles, so findet man hier für den Fall $a_{i_1} = 45°$ das

Maximum, nämlich 1°37′, also etwa den dreißigsten Teil des ganzen Azimutes.

Beispiel b): Es sei $n = 1{\cdot}5$; $\psi = 48°48'$; $i_1 = \frac{1}{2}\psi = 24°24$; dann wird:

$$r_1 = 15°59'; \quad r_2 = 32°49'; \quad i_2 = 54°24'; \quad \delta = i_2 - \tfrac{1}{2}\psi = 30°00'.$$

Die Randstrahlen bilden nach der Brechung an der Spitze bei A_1 einen Kegel von der Öffnung 60°; für die Azimute ergeben sich für:

$$a_{i_1} = 0°00';\ 15°00';\ 30°00';\ 45°00';\ 60°00';\ 75°00';\ 90°00';$$

die Werte:

$$a_{i_2} = 0°00';\ 13°51';\ 27°58';\ 42°35';\ 57°53';\ 73°45';\ 90°00'.$$

Ebenso die übrigen drei Quadranten. Auch hier tritt das Maximum der Änderung $(a_{i_1} - a_{i_2})$ bei $a_{i_1} = 45°$ auf und hat den Wert 2°25′, also etwa den zwanzigsten Teil des ganzen Azimutes.

Beispiel c). Es sei $n = 1{\cdot}5$; $\psi = 28°20'$; $i_1 = \frac{1}{2}\psi = 14°10'$; daraus wird:

$$r_1 = 9°23'; \quad r_2 = 18°57'; \quad i_2 = 29°09'; \quad \delta = i_2 - \tfrac{1}{2}\psi = 15°00'.$$

Die Randstrahlen bilden hier nach der Brechung in F_1 einen Kegel von der Öffnung 30°; inbezug auf die Azimute folgen aus der Rechnung für:

$$a_{i_1} = 0{\cdot}00';\ 15°00';\ 30°00';\ 45°00';\ 60°00';\ 75°00';\ 90°00';$$

die Werte:

$$a_{i_2} = 0°00';\ 14°44';\ 29°31';\ 44°27';\ 59°34';\ 74°43';\ 90°00'.$$

Ebenso für die übrigen drei Quadranten. Auch hier tritt bei $a_{i_1} = 45°$ das Maximum der Azimut-Änderung ein; dieselbe ist 0°33′, also etwa der achtzigste Teil des ganzen Azimutes.

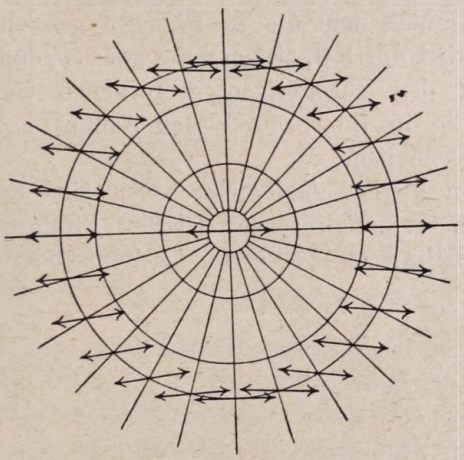
*

Man ersieht aus diesen einfachen Beispielen, daß selbst im Falle eines Strahlenkegels von 60° Öffnung, die Änderung des Azimutes infolge zweimaliger Brechung und Ablenkung noch immer verhältnismäßig gering ist; bei dem Beispiel *c)* mit der

Kegelöffnung von 30° ist der größte Wert dieser Änderung kaum größer, als ein halber Grad, so daß man bei wirklichen, qualitativen Versuchen in den meisten Fällen von dieser Änderung absehen kann.

*

In der Figur 3 sind Schwingungsazimute der eben aus einer Linse austretenden Randstrahlen dargestellt, die zu einem Strahlenkegel gehören, der aus einem parallelen kreiszilinder-



Figur 3.

förmigen Strahlenbündel mittels der in Figur 2 ersichtlichen Linse sich formte. Die Azimute lassen sich mit dem Azimut des längs der Linsenaxe unverändert fortschreitenden Strahles vergleichen; sie sind nach der Formel (I) berechnet und beziehen sich auf den Strahlenkegel des Beispiels *b)*, von 60° Öffnung.

Indessen, um die so berechneten Unterschiede $(\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2})$ besser erkennen zu können, sind in der *Zeichnung* die *fünffach* vergrößerten Werte dieser Differenzen benützt worden; man bemerkt in der Tat die so gezeichneten Unterschiede, wenn man genau zusieht.

Es muß bemerkt werden, daß sowohl für jeden einfallenden, sowie für den zugehörigen gebrochenen Strahl die Azimute von der Normalen der jeweiligen Einfalls- und Brechungsebene zu

rechnen sind. Während jedoch die Schwingungsebenen und Schwingungsrichtungen der einfallenden Strahlen hier alle parallel-, und die Letzteren senkrecht zur Linsenaxe sind: liegen die Schwingungsrichtungen der gebrochenen Strahlen stets senkrecht zu diesen, sind jedoch unter einander nicht parallel und liegen auch nicht genau in einer Ebene.

Wollte man nun den in der Spitze des Kegels bei F_1 auftretenden Polarisationszustand, wie er sich bei dem Zusammentreffen der gebrochenen Randstrahlen in F_1 ergiebt, graphisch darstellen, so müßte man die in Figur 3 gezeichneten Pfeil-Geraden eigentlich durch F_1 ziehen; und zwar so, daß jede Gerade senkrecht auf den zugehörigen gebrochenen Randstrahl sei und gleichzeitig in ihrer, durch das Azimut a_{i_2} bestimmten Schwingungsebene liege.

Aber eben diese *Schwingungsebenen* sind es, die infolge des Durchganges eines linearpolarisierten Strahles durch eine Linse eine verhältnismäßig so geringe Azimutsänderung erleiden.

4.

STABILES GLEICHGEWICHT OHNE POTENTIAL.

Von JULIUS FARKAS,

O. M. DER AKADEMIE.

Vorgelegt der Akademie in den Sitzungen von 14. Dez. 1914 und 13. Nov. 1916.*

Aus den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik folgt für mögliche infinitesimale Störungen des Gleichgewichtes

$$\delta x + \delta\varepsilon - T\delta\eta - \delta'\mu < 0, \tag{1}$$

hier bedeutet x die kinetische Energie, ε den übrigen Teil der Energie, η die Entropie, T die gleichmäßig gedachte absolute Temperatur des zu betrachtenden materiellen Systems, und $\delta'\mu$ ist die von demselben während der elementaren Veränderungen δx, $\delta\varepsilon$, $\delta\eta$ aufgenommene mechanische Arbeit.

Die Bedingungen des stabilen Gleichgewichtes sind gründlich studiert worden für den Fall, daß $\delta'\mu$ eine umkehrbare Arbeit ist und das Gleichgewicht nur durch solche Einwirkungen gestört werden kann, bei welchen dem Inkrement

$$\delta'\psi \equiv \delta\varepsilon - T\delta\eta - \delta'\mu \tag{2}$$

ein integrierender Faktor zukommt. Letztere Einschränkung soll hier gewissermaßen beseitigt werden.

---

* Erschienen unter dem Titel: Biztos egyensúly potenciál nélkül, und Multiplicatoros módszer négyzetes alakhoz Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie). Bd. XXXIII und XXXV. (Budapest, 1915 és 1917) S. 339—354 und 51—53.

Voraussetzungen:

a) Das materielle System ist in Gleichgewicht und sein Zustand wird bestimmt durch eine endliche Anzahl Parameter $u_1, \ldots, u_n$ und eine gleichmäßige Temperatur T.

b) Die Parameter u können auf die Art gewählt werden, daß die elementare Arbeit $\delta'\mu$ eine lineare homogene Funktion der Differentiale $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$:

$$\delta'\mu = \sum_1^n A_i \delta u_i \tag{3}$$

ist.

c) Die Wirkungskomponenten $A_1, \ldots, A_n$ sind differenzierbare Funktionen der Zustandsmerkmale $T, u_1, \ldots, u_n$.

d) Die Energie ε und die Entropie η sind wenigstens zweimal differentierbare Funktionen der Zustandsmerkmale.

Unter diesen Voraussetzungen soll nun der Fall betrachtet werden, wo bloß dem in $\delta(T, u_1, \ldots, u_n)$ linearen Teile des Inkrementes $\delta'\psi$ ein integrierender Faktor zukommt; die Summe des linearen und quadratischen Teiles von $\delta'\psi$ besitzt keinen integrierenden Faktor mehr, denn der im linearen Ausdrucke (3) vorkommende Vektor $(A_1, \ldots, A_n)$ ist als eine mit dem Zustand wesentlich veränderliche Funktion zu betrachten.

I. Es sollen solche äußere Verhältnisse angenommen werden, daß $\delta'\psi$ (2) nur positive Werte erhalten kann:

$$\delta'\psi \equiv \delta\varepsilon - T\delta\eta - \delta'\mu = \delta\varepsilon - (T\delta\eta + \Sigma A\delta u) > 0. \tag{4}$$

War dann das System in Ruhe, so bleibt es weiterhin in Ruhe, weil aus dem Zustande der Ruhe nur positive δx Werte möglich sind und so erlaubt die prinzipielle Ungleichung (1) zwischen den vorausgesetzten äußeren Verhältnissen wegen (4) gar keine Zustandsänderung.

Vorläufig sollen $T, u_1, \ldots, u_n$ in einem endlichen Gebiete (G) für unabhängige Veränderliche gelten; statt der Temperatur T soll aber die Entropie als eine Unabhängige eingeführt werden. In Nr. III kehren wir zurück zu der Temperatur als eine unabhängig veränderliche. Es soll zugelassen werden, daß in (G) überall Gleichgewicht möglich ist und die Ungleichung (4) überall besteht.

Diese Ungleichung verlangt das Verschwinden des linearen Teiles, folglich ist überall im Gebiete (G).

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = T, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_i} = A, \tag{5}$$

und so auch

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial u_j} = \frac{\partial A_j}{\partial u_i}. \tag{6}$$

Der quadratische Teil in $\delta'\psi$ ist die Hälfte von

$$\begin{aligned} \delta^2\varepsilon &= \sum \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_i^2}\delta u_i^2 + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2}\delta\eta^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_i \partial u_j}\delta u_i \delta u_j + 2\sum \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_i \partial \eta}\delta u_i \delta\eta = \\ &= \sum \frac{\partial A_i}{\partial u_i}\delta u_i^2 + \frac{\partial T}{\partial \eta}\delta\eta^2 + \sum_{i \neq j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial u_j} = \frac{\partial A_j}{\partial u_i}\right)\delta u_i \delta u_j + \\ &\quad + 2\sum\left(\frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \eta}\right)\delta u_i \delta\eta. \end{aligned} \tag{7}$$

In Betracht dessen, daß $\delta'\psi$ nur positive Werte in (G) erhalten kann, soll vorstehender Ausdruck eine positive definite Form in (G) darstellen.

Die Dirichletsche Definition des stabilen Gleichgewichtes wird bei unseren Voraussetzungen nicht wesentlich spezialisiert, indem wir das Gleichgewicht in einem inneren Punkte

$$(P^\circ) \equiv (\eta^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_n^\circ)$$

des Gebietes (G) schon in dem Falle stabil nennen, daß die infolge von momentanen fremden Einwirkungen in (P^0) erzeugte kinetische Energie $\varkappa^\circ$ immer hinreichend klein vorausgesetzt werden kann, damit der Zustand des Systems unaufhörlich in einem um den Punkt (P°) willkürlicheng gewähltem Bereiche verweilt.

Man beachte nun, daß die Ungleichung $\delta^2\varepsilon > 0$ (7) auf die Weise aufgefaßt werden kann, daß es immer einen hinreichend kleinen Radius r° gibt für den im Inneren der Kugel

$$(\eta - \eta^\circ)^2 + (u_1 - u_1^\circ)^2 + \cdots + (u_n - u_n^\circ)^2 = r^{\circ 2} \tag{8}$$

beständig und überall die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial A_i^\circ}{\partial u_i^\circ}(u_i - u_i^\circ)^2 + \frac{\partial T^\circ}{\partial \eta^\circ}(\eta - \eta^\circ)^2 + \\ &+ \sum_{i \neq j} \frac{\partial A_i^\circ}{\partial u_j^\circ}(u_i - u_i^\circ)(u_j - u_j^\circ) + 2\sum \frac{\partial T}{\partial u_i^\circ}(\eta - \eta^\circ)(u_i - u_i^\circ) > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

besteht.

Wird hier der linksstehende Ausdruck durch 2Ω bezeichnet, so verlangt die prinzipielle Ungleichung (1), daß Ω vermehrt um die entsprechende Veränderung $\varkappa - \varkappa^\circ$ der kinetischen Energie, stets negativ sei, also ist sicher

$$\Omega < \varkappa^\circ - \varkappa. \tag{10}$$

Nun bedeutet die Fiktion $\Omega = \varkappa^\circ$ bei passend klein gewählter $\varkappa^\circ$ eine im Inneren der Kugel (8) befindliche Ellipsoide mit dem Mittelpunkte (P°). Nach (10) ist aber $\Omega < \varkappa^\circ$; folglich verharrt der Punkt (P) fortwährend im Innern der Ellipsoide $\Omega = \varkappa^\circ$; das Gleichgewicht ist stabil.

II. Betrachten wir jetzt den Fall, daß die Zustandsmerkmale $u_1, \ldots, u_n$ und T oder η nicht unabhängig variiert werden können, sondern endlichviele holonome oder nichtholonome Beziehungen zwischen den möglichen Veränderungen $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$ und δT oder $\delta\eta$ bestehen. Setzt man u_0 für T oder η, so lauten diese Beziehungen bei der zu verfolgenden Pünktlichkeit zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &\sum_0^n q_{0i}\delta u_i + \sum_{00}^{nn} q_{0ij}\delta u_i \delta u_j = 0 \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_0^n q_{mi}\delta u_i + \sum q_{mij}\delta u_i \delta u_j = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

wo die Koeffizienten differenzierbare Zustandsfunktionen von der Beschaffenheit bedeuten, daß die linearen Teile dieser Gleichungen unabhängig von einander sind, und zwar soll sich diese Unabhängigkeit schon an den $m+1$ ersten Gliedern der Ausdrücke bewähren. Bei eben solchem Grade der Pünktlichkeit schreiben wir für die Annahme $\delta'\psi > 0$ (4):

$$\delta'\psi = \sum_0^n R_i \delta u_i + \sum_{00}^{nn} R_{ij}\delta u_i \delta u_j > 0. \tag{12}$$

Die Reduktion dieser Ungleichung auf $n-m$ unabhängige Inkremente kann durch Substituierung auf die folgende Weise bequem ausgeführt werden: Zunächst werden in (11) die quadratischen Teile für Konstanten betrachtet, $\delta u_0, \delta u_1, \ldots, \delta u_m$, als Funktionen

dieser quadratischen Teile und der unabhängigen Inkremente $\delta u_{m+1}, \ldots, \delta u_n$ berechnet und in (12) eingesetzt, wobei der sich ergebende doppelt-quadratische Teil unterdrückt wird. Jetzt ist in (12) noch der neue quadratische Teil zu behandeln. Die in diesem vorkommenden $m+1$ vorersten Inkremente werden ebenfalls durch ihre schon berechneten Werte ersetzt und zwar mit Unterdrückung des entstehenden biquadratischen Teiles.

Die Reduktion kann auch durch eine multiplikatorische Methode ausgeführt werden. Schreiben wir zu diesem Zwecke einfach x für δu, so ist die Form

$$\sum_0^n R_i x_i + \sum_{00}^{nn} R_{ij} x_i x_j \equiv \Psi > 0 \tag{13}$$

mit Bezugnahme auf die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_0^n q_{0i} x_i + \sum_{00}^{nn} q_{0ij} x_i x_j = 0 \\ \sum_0^n q_{1i} x_i = \sum_{00}^{nn} q_{1ij} x_i x_j = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_0^n q_{mi} x_i + \sum_{00}^{nn} q_{mij} x_i x_j = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$

zu reduzieren.

Diese Gleichungen sollen zunächst der Reihe nach mit den vorläufig unbestimmten Größen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ multipliziert und dann zum Ausdrucke Ψ in (13) addiert werden:

$$\begin{aligned} &\sum (R_i + \lambda_0 q_{0i} + \lambda_1 q_{1i} + \cdots + \lambda_m q_{mi})\, x_i + \\ &+ \sum (R_{ij} + \lambda_0 q_{0ij} + \lambda_1 q_{1ij} + \cdots + \lambda_m q_{mij})\, x_i x_j = \Psi > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Multiplikatoren λ können so bestimmt werden, daß im linearen Teile die $m+1$ ersten eingelkammerten Summen verschwinden. Das zieht nach sich, daß die übrigen eingeklammerten Summen aus dem linearen Teile ebenfalls verschwinden, denn die Variablen $x_{n-1}, \ldots, x_m$ sind unabhängige unendlich kleine Zuwächse. Man hat also

$$R_i + \lambda_0 q_{0i} + \lambda_1 q_{1i} + \cdots + \lambda_m q_{mi} = 0, \tag{16}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n).$$

Es bleibt nur der quadratische Teil von Ψ (15), wo die Multiplikatoren λ zu ersetzen sind durch ihre, sich aus den ersten $m+1$ Gleichungen von (16) ergebenden Werte. Weiterhin soll der auf den quadratischen Teil herabgesetzte Ausdruck Ψ auf die folgende Form gebracht werden:

$$(17) \qquad \Psi = x_0 \Sigma P_{0i} x_i + x_1 \Sigma P_{1i} x_i + \cdots + x_n \Sigma P_{ni} x_i > 0.$$

Da die x unendlich kleine Zuwächse bedeuten, so sind wegen der Reduktion dieses Ausdruckes in den Gleichungen (14) nur die linearen Teile:

$$(18) \qquad \Sigma q_{0i} x_i = 0, \quad \Sigma q_{1i} x_i = 0, \ldots, \quad \Sigma q_{mi} x_i = 0$$

zu behalten.

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\Sigma \lambda_{0i} x_i, \quad \Sigma \lambda_{1i} x_i, \ldots, \quad \Sigma \lambda_{mi} x_i$$

und addieren daun dieselben zu der Summe in (17). Ich behaupte, daß die vorläufig unbestimmten Multiplikatoren λ so bestimmt werden können, daß die Form Ψ (17) dann lediglich die unabhängigen Variablen $x_{m+1}, \ldots, x_n$ enthalten wird. Zu diesem Zwecke soll die Form Ψ auf drei geeignet ausgewählte Teile Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, zerlegt werden:

$$(19) \qquad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3,$$

$$(19_1) \qquad \Psi_1 = \sum_{(i=0,\,1,\ldots,\,m;\; j=0,\,1,\ldots,\,m)} (P_{ji} + q_{0i}\lambda_{0j} + q_{1i}\lambda_{1j} + \cdots + q_{mi}\lambda_{mj})\, x_i x_j;$$

$$(19_2) \qquad \Psi_2 = \sum_{(i=0,\,1,\ldots,\,n;\; j=m+1,\ldots,\,n)} \left(\begin{matrix} P_{ji} + q_{0i}\lambda_{0j} + q_{1i}\lambda_{1j} + \cdots + q_{mi}\lambda_{mj} + \\ + P_{ij} + q_{0j}\lambda_{0i} + q_{1j}\lambda_{1i} + \cdots + q_{mj}\lambda_{mi} \end{matrix} \right) x_i x_j;$$

$$(19_3) \qquad \Psi_3 = \sum_{(i=m+1,\ldots,\,n;\; j=m+1,\ldots,\,n)} (P_{ji} + q_{0i}\lambda_{0j} + q_{1i}\lambda_{1j} + \cdots + q_{mi}\lambda_{mj})\, x_i x_j.$$

Sind Multiplikatoren λ möglich, durch welche sämmtliche in Ψ_1 und Ψ_2 eingeklammert befindlichen Summen verschwinden, so hat man $\Psi = \Psi_3$, und die Reduktion ist durchgeführt. Die Systeme $q_{0i}, q_{1i}, \ldots, q_{mj}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ sind nun unabhängig von einander, denn die Gleichungen (18) sind schon vermöge der $m+1$ ersten Gliedern unabhängig. Setzt man also die in

die in Ψ_1 und Ψ_2 vorkommenden eingeklammerten Summen gleich Null, so erhält man ein System vereinbarer Gleichungen für $\lambda_{0j}, \lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{mj}$, und zwar aus Ψ_1 bei $j=0, j=1, \ldots, j=m$, und aus Ψ_2 bei $j=m+1, \ldots, j=n$.

Nach vollzogener Reduktion folgt die Stabilität für die unabhängigen Inkremente $\delta u_{m+1}, \ldots, \delta u_n$ abenso, wie oben für $\delta\eta, \delta u_1, \ldots, \delta u_n$.

III. In praktischen Anwendungen ist die Unabhängigkeit der Entropie (η) meistens durch die der Temperatur (T). zu ersetzen. Diesbezüglich soll die freie Energie (φ) an die Stelle der Energie (ε) eingeführt werden:

$$\varphi \equiv \varepsilon - T\eta. \tag{20}$$

Bei Aufrechthaltung einer Pünktlichkeit zweiter Ordnung, zieht man hieraus:

$$\delta\varepsilon = \delta\varphi + T\delta\eta + \eta\delta T + \delta\eta.\delta T.$$

Unsere Hauptannahme (4) geht hiemit über in

$$\delta\psi' \equiv \delta\varphi + \eta\delta T - \sum_1^n A_i \delta u_i + \delta\eta.\delta T > 0,$$

also

$$\delta'\psi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \eta\right)\delta T + \sum_1^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} - A_i\right)\delta u_i + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \delta\eta\delta T > 0. \tag{21}$$

Aus dem linearen Teile ergibt sich jetzt bei unabhängigen $\delta T, \delta u_1, \ldots, \delta u_n$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial T} = -\eta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = A_i, \tag{22}$$

Der quadratische Teil bleibt. Sein Doppeltes ist ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial T} + 2\eta\right)\delta T^2 + 2\sum_1^n \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \eta\right)\delta u_i \delta T + \\ + \sum_1^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i^2}\delta u_i^2 + \sum_{1,1}^{n,n}{}_{i\neq j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}\delta u_i \delta u_j > 0,$$

oder nach (22):

$$\frac{\partial\eta}{\partial T}\delta T^2 + \sum_1^n \frac{\partial A_i}{\partial u_i}\delta u_i^2 + \sum_{1,1}^{n,n}{}_{i\neq j} \frac{\partial A_i}{\partial u_j}\delta u_i \delta u_j > 0.$$

Dies gilt, wenn alle Zustandsmerkmale $(T, u_1, \ldots, u_n)$ von einander unabhängig sind. Bestehen aber holonome oder nichtholonome Beziehungen zwischen denselben, so treten hier ebenfalls die Methoden von Nr. II in Geltung.

*

Die Originalarbeit enthält etliche Anwendungen. Diese, sowie viele andere weisen darauf hin, daß die Bedingungen dafür, daß $\delta'\psi$ eine definite Form darstellt, nicht nur genügende, sondern auch notwendige Bedingungen der Stabilität sind, allerdings unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen.

In der Originalarbeit findet sich auch eine Untersuchung um eine Bemerkung des Herrn DUHEM über das Clausiussche Axiom.[1] Es wird gezeigt, daß die mögliche Wärmeströmung nicht jenem Axiom widerspricht.

Zum Schluß folgt eine Betrachtung über die Gleichmäßigkeit der Temperatur. Wird das materielle System von einer gleichmäßig temperierten Wärmequelle oder teils von einer solchen, teils von einer thermisch isolierenden Hülle umgeben, so kann gezeigt verden, daß die Gleichmäßigkeit der Temperatur eine notwendige Bedingung des Gleichgewichtes ist. Die Beweisführung geschieht mit einer Pünktlichkeit erster Ordnung mittelst eines Ergebnisses des Clausiusschen Axioms.[2]

---

[1] P. DUHEM: «Traité d'Energétique». II. 1911. S. 214—216.

[2] H. POINCARÉ: «Thermodynamique». 1908. Art. 184.

5.

EINSTEINSCHE GRAVITATION NACH ALTER THEORIE.

Von JULIUS FARKAS,

O. M. DER AKADEMIE.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie in der Sitzung vom 3. Okt. 1921.*

Unter alter Theorie verstehe ich hier die spezielle Relativitätstheorie, nach welcher hier, einem noch älteren Prinzipe, dem Prinzipe der virtuellen Arbeit der Inertialkräfte gemäß, der Einkörperproblem behandelt werden soll. Die Bewegungsfreiheit des zu betrachtenden Punktes im vierdimensionalen ebenen Raume, wird zu diesem Zwecke auf eine dreidimensionale Rotationsfläche beschränkt. Letztere läßt sich schließlich auf die Art spezialisieren, daß genau die bezüglichen EINSTEINschen Gravitationsgleichungen für unseren dreidimensionalen empirischen Raum hervorgehen.

I. *Bezeichnungen.* Die Koordinaten im vierdimensionalen ebenen Raume werden durch w, x, y, z bezeichnet; x, y, z sind hier die Koordinaten in unserem empirischen Raume, und w bedeutet die imaginäre Zeitkoordinate auf der eindimensionalen Normale dieses Raumes. Der dreikomponentige Anteil (x, y, z) des vierkomponentigen Vektors (w, x, y, z) soll kurz mit r bezeichnet werden; $(o, x, y, z) = (x, y, z) \equiv \mathrm{r}$, und der Betrag des-

* Erschienen unter dem Titel: *Einstein-féle gravitatio régi elmélet-ből*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie). Bd. XXXIV, (Budapest, 1922) S. 156—163.

selben mit r. Der skaläre Produkt $w_1w_2+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ ist dann eine Invariante der LORENTZ-Transformationen:

$$w_1w_2+\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2=w_1w_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\text{Inv.}$$

Betrachten wir ein unabhängiges System von n Massenpunkten (Energieknoten) mit den invarianten konstanten Massen (Ruhmassen) $m_1,\ldots m_n$ an den veränderlichen Orten $w_1, \mathfrak{r}_1;\ldots;$ $w_n, \mathfrak{r}_n$. Die Vierervektoren $(w_1, \mathfrak{r}_1),\ldots,(w_n, \mathfrak{r}_n)$ sollenals Funktionen von einem und demselben invarianten reellen Zeitparameter τ angesehen werden. Die totalen Derievirten einer jeden von τ abhängigen Größe werden mit oberen Punkten bezeichnet, so die «Vierergeschwindigkeit» und «Viererbeschleunigung» des Massenpunktes (m_i) durch $(\dot{w}_i, \dot{\mathfrak{r}}_i)$ und $(\ddot{w}_i, \ddot{\mathfrak{r}}_i)$:

$$\frac{d}{d\tau}(w, \mathfrak{r})\equiv(\dot{w}, \dot{\mathfrak{r}}), \quad \frac{d^2}{d\tau^2}(w, \mathfrak{r})\equiv(\ddot{w}, \ddot{\mathfrak{r}}).$$

Hieran knüpfen sich

$$\frac{dr}{d\tau}\equiv\dot{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}}{r}, \quad (r^2=x^2+y^2+z^2);$$
$$\frac{d^2r}{d\tau^2}\equiv\ddot{\mathfrak{r}}=\frac{d\dot{\mathfrak{r}}}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}}{r}\right)=\frac{\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}+\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2}{r}.$$

II. *Das Prinzip der virtuellen Arbeit der Inertialkräfte* im vierdimensionalen Raume besagt in bezug auf ein unabhängiges System von Massenpunkten $(m_1),\ldots,(m_n)$: Das Bezugssystem $w, \mathfrak{r}$ und der Zeitparameter τ können so gewählt werten, daß die virtuelle Arbeit der Inertialkräfte stets verschwindet:

$$\Sigma m_i(\ddot{w}_i\delta w+\ddot{\mathfrak{r}}_i\delta\mathfrak{r}_i)=0,$$

Wir beschränken uns auf das unabhängige System von zwei Massenpunkten (m), (m_0), und zwar mit der Verfügung, daß die Masse m_0 sehr groß gegen m sei, und nehmen die auf dieselben bezogene prinzipielle Gleichung

$$(1) \qquad m(\ddot{w}\delta w+\ddot{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{r})+m_0(\ddot{w}_0\delta w_0+\ddot{\mathfrak{r}}_0\delta\mathfrak{r}_0)=0$$

in dem Falle, daß der Massenpunkt (m_0) sich in dem gewählten Bezugssystem mit einer konstanten Geschwindigkeit:

$$(\dot{w}_0, \dot{\mathfrak{r}}_0) = \text{Konst} \tag{2}$$

bewegt, für zutreffend an.

Von dem physikalischen Raumzustande — verursacht lediglich durch die Anwesenheit der beiden Massenpunkte — soll angenommon werden, derselbe erzeuge einen Zwang, wonach der Massenpunkt (m) auf eine dreidimensionale Rotationsfläche, um die geradlinige Bahn des Massenpunktes (m_0), als Rotationsaxe verweisen ist. Gesetzt der Anfangspunkt des Bezugssystems wurde auf der Bahnlinie des Massenpunktes (m_0) genommen, so haben wir für die Beschränkung der Beweglichkeit des Massenpunktes (m):

$$\dot{w}_0 w + \dot{\mathfrak{r}}_0 \mathfrak{r} = \varphi(w^2 + \mathfrak{r}^2) \tag{3}$$

mit einer Funktion φ von invarianter Beschaffenheit.

Alle drei Postulate (1), (2), (3) sind invariant gegen Lorentz-Transformationen.

Zur Vereinfachung legen wir jetzt die Axe der Zeitkoordinaten w auf die geradlinige Bahn des Massenpunktes (m_0). Dann geht die Gleichung (2) in

$$\dot{w}_0 = \text{Konst.}, \quad \dot{\mathfrak{r}}_0 = 0 \tag{4}$$

über und die Gleichung (3) in $\dot{w}_0 w = \varphi(w^2 + \mathfrak{r}^2)$, oder da $\mathfrak{r}^2 = r^2$ ist, durch Auflösung nach w in

$$w = \psi(r). \tag{5}$$

In folge von (4) und (5) reduziert sich unsere prinzipielle Gleichung (1) auf

$$\ddot{w}\delta w + \ddot{\mathfrak{r}}\delta\mathfrak{r} \equiv \left(\ddot{\psi}\psi' \frac{\mathfrak{r}}{r} + \ddot{\mathfrak{r}}\right)\delta\mathfrak{r} = 0, \quad \left(\psi' \equiv \frac{d\psi}{dr}\right). \tag{6}$$

Das Inkrement $\delta\mathfrak{r}$ unterliegt keiner Beschränkung, also ergibt sich als Bewegungsgleichung des Massenpunktes (m):

$$\ddot{\psi}\psi' \frac{\mathfrak{r}}{r} + \ddot{\mathfrak{r}} = 0. \tag{7}$$

III. *Der Zeitparameter τ als* Minkowskische *Eigenzeit.* Für die effektive Bewegung ergibt sich aus Gleichung (6) $\ddot{w}\dot{w}+\ddot{\mathfrak{r}}\dot{\mathfrak{r}}=0$, also $\dot{w}^2+\dot{\mathfrak{r}}^2=$Konst. Im Sinne des Relativitätsprinzipes ist diese Konstante negativ. Bei passender Wahl der Zeiteinheit wird sie der negativen Einheit gleich, und der Zeitparameter τ erscheint als Eigenzeit des Massenpunktes (m). Mit Rücksicht auf (5), haben wir dem entsprechend

$$(8_1) \qquad \psi'^2\dot{r}^2+\dot{\mathfrak{r}}^2=-1.$$

In der Entwickelung der Bewegungsgleichung (7) wird dieses erstes Integral von ihr eine wesentliche Anwendung finden. Gleichwohl wird aber auch das vektorielle erste Integral benutzt, welches sich aus der evidenten Folgegleichung $[\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}]=0$ ergibt. Bedeutet $\mathfrak{a}$ einen unbestimmten dreikomponentigen konstanten Vektor, so hat man $[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]=\mathfrak{a}$, und die noch zu benutzende Beziehung ist

$$(8_2) \qquad [\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]^2\equiv(\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2)\,r^2=\mathfrak{a}^2.$$

Aus (8_1) und (8_2) wird $\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2$ und $\dot{r}^2$ als Funktionen von r:

$$(9) \qquad \dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2=\frac{\mathfrak{a}^2}{r^2}, \quad \dot{\mathfrak{r}}^2=-\frac{1+\dfrac{\mathfrak{a}^2}{r^2}}{1+\psi'^2}.$$

IV. *Entwickelung der Bewegungsgleichung.* Man hat offenbar

$$\ddot{\psi}=\frac{d\psi'\dot{r}}{d\tau}=\psi''\dot{r}^2+\psi'\frac{d}{d\tau}\frac{[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}}{r}=$$

$$=\psi''\dot{r}^2+\psi'.\left(\frac{\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}+\dot{\mathfrak{r}}^2}{r}-\frac{\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}}{r^2}\dot{r}\right)=\psi''\dot{r}^2+\psi'\frac{\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}+\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2}{r}$$

folglich nach (7)

$$\ddot{\mathfrak{r}}=-\left(\psi''\dot{r}^2+\psi'\frac{\mathfrak{r}\ddot{\mathfrak{r}}+\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2}{r}\right)\psi'\frac{\mathfrak{r}}{r}.$$

Durch skaläre Multiplikation mit dem Einheitsvektor $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ ergibt sich hieraus

$$\frac{r\ddot{r}}{r} = -\left(\psi''\dot{r}^2 - \psi'\frac{\dot{\mathfrak{r}}^2+\dot{r}^2}{r}\right)\frac{\psi'}{1+\psi'^2}.$$

Wird dieser Ausdruck in den vorangehenden eingesetzt, so ergibt sich

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\left(\psi''\dot{r}^2+\psi'\frac{\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2}{r}\right)\frac{\psi'}{1+\psi'^2}\frac{\mathfrak{r}}{r}.$$

Vermöge der beiden Ausdrücke (9) erhalten wir nun, als dem Betrage nach eine Funktion des Abstandes r:

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \left(\left(1+\frac{\mathfrak{a}^2}{r^2}\right)\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} - \frac{\mathfrak{a}^2}{r^3}\frac{\psi'^2}{1+\psi'^2}\right)\frac{\mathfrak{r}}{r}. \tag{10}$$

V. *Phänomenologische Annahme zur näheren Bestimmug des Raumzustandes. Übereinstimmung mit dem bezüglichen Ergebnisse der allgemeinen Relativitätstheorie.* Es soll nunmehr die Annahme gemacht werden, die von der Flächengeschwindigkeit $\mathfrak{a}$ unabhängige Komponente der Beschleunigung (10) sei gleich der Newtonschen Beschleunigung. Da die Masse m verschwindend klein ist gegen m_0, so wird diese Annahme offenbar sehr pünktlich erfüllt durch den Ansatz:

$$\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} = -\frac{M_0}{r^2},$$

wo M_0 die mit der Gravitationskonstante multiplizierte Masse m_0 bedeutet. Desgleichen entspricht aber unserer Annahme auch die folgende Erweiterung dieses Ansatzes:

$$\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} = -\frac{M}{r^2} - f'(r), \tag{11_1}$$

oder nach einer Quadratur:

$$\frac{1}{2}\frac{\psi'^2}{1+\psi'^2} = \frac{M}{r} + f(r) \tag{11_2}$$

nebst der Festsetzung, daß die Funktion $f(r)$ aus dem Ausdrucke (10) der Beschleunigung herausfalle. (Die Integrationskonstante wurde in die Funktion f mit eingerechnet.)

Dieses Postulat wird befriedigt durch

$$(11_3) \qquad \left(1+\frac{\mathfrak{a}^2}{r^2}\right) f' = 2\,\frac{\mathfrak{a}^2}{r^3}\, f.$$

Vermöge der Gleichungen (11_1), (11_2), (11_3) geht der Ausdruck (10) der Beschleunigung in

$$(12) \qquad \ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{M\mathfrak{r}}{r^3}\left(1+3\,\frac{\mathfrak{a}^2}{r^2}\right)$$

über.

Bezüglich der Perihelbewegung des Planeten Merkur findet Herr EINSTEIN für die Beschleunigung (abgesehen von einem Druckfehler):

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}, \quad \Phi = -\frac{a}{2r}\left(1+\frac{B^2}{r^2}\right)^1$$

wo $\nu = 1, 2, 3$ zu denken ist, a bedeutet eine durch die Sonnenmasse bestimmte Konstante, und B den konstanten Betrag der Flächengeschwindigkeit. Setzt man $\mathfrak{r}$ für (x_1, x_2, x_3), $2M$, $\mathfrak{a}^2$, τ für a, B^2, s, so ergeben diese Formeln genau den Inhalt der hier erhaltenen Formel (12).

*

Im Originaltext sind noch zum Schluß Zusätze enthalten über die Energiegleichung, über den Raumzustand und über das Potential des abstraktiven Ausdruckes:

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{M\mathfrak{r}}{r^3}\left(1+3\,(\dot{\mathfrak{r}}^2-\dot{r}^2)\right).$$

---

[1] EINSTEIN: «Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.» Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch.

6.

NEUE METHODE ZUR UNTERSUCHUNG DER GRENZFLÄCHENSPANNUNG FEST-FLÜSSIG.

Von Dr. KARL TANGL.

O. M. DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BUDAPEST.

Auszug einer, der III. Klasse der Ung. Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 10. Juni 1918 vorgelegten Abhandlung.*

1. Taucht man einen festen Körper in Wasser, so ändert sich dadurch die Oberflächenspannung des festen Körpers. Diese Änderung suchte ich zuerst an Kautschuk zu bestimmen.[2] Es wurde die Änderung des Innenvolumens von Kautschukröhren gemessen, wenn sie aus Luft in Wasser getaucht werden. Sodann überzog ich Kautschukröhren mit Paraffin oder einer ganz dünnen Platinschicht.[3] Die mit Platin bedeckten Kautschukröhren gaben gut überimstimmende Resultate mit ein und derselben Kautschuksorte; Röhren verschiedenen Ursprungs führten aber zu stark abweichende Werten. Um die Metalle untersuchen zu können, griff ich daher zu einer neuen Methode.

2. Denken wir uns ein äußerst dünnes Band aus dem Metalle; kommt dies Band aus Luft in Wasser, so ändert sich die Oberflächenspannung um F. Ist s die Breite des Bandes, so

---

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: «*Új módszer a szilárd anyag határán fellépő felületi feszültség vizsgálatára*» *Mathematikai és Természettudományi Értesitő* (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger, Akademie), Bd. XXXVII., (Budapest, 1920), p. 43—61.

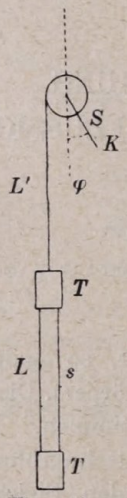
[2] Ann. d. Phys. 34. p. 311—342. 1911.

[3] Ann. d. Phys. 42. p. 1221—1242. 1913.

ändert sich dabei die Länge um ebensoviel, als wenn auf die Endflächen ein Zug

$$p = 2Fs(1-\mu) \tag{1}$$

wirkte. (μ = Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation.) Es soll s gemessen werden, um daraus F zu berechnen.



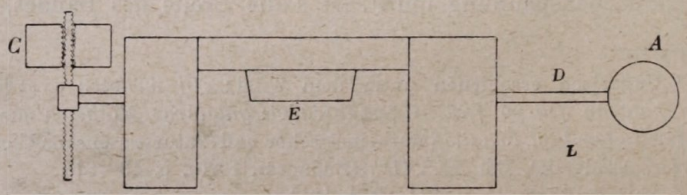
Figur 1.

3. In folge des Krieges konnte ich dünne Metallfolien nur aus Aluminium einschaffen. Das 3—4 mm breite Aluminiumband L wurde an beiden Enden in kleine Silberklötze eingeklemmt; der untere Klotz war fix; der obere mit dem dünnen Platindrahte L' verbunden. Dieser Draht war an den Mantel eines horizontalen zylindrischen Stabes gelötet. (Fig. 1.) Die Axe dieses Stabes D lag in der Drehungsaxe eines Schwingungskörpers (Fig. 2), der mit der Schneide E auf einer Glasplatte auflag; A ist ein kleiner Spiegel; mit dem Schraubenkopf C konnte der Schwerpunkt des Schwingungkörpers verlegt werden. Der Schwerpunkt S des Schwingungkörpers lag seitwärts (Fig. 1), wodurch das Aluminiumband gespannt gehalten wurde.

Wird auf den oberen Klotz T das Gewicht p aufgelegt, so wird dadurch der Schwingungskörper mit dem Winkel $\Delta\varphi$ gedreht; es ist

$$\frac{\Delta\varphi}{p} = \frac{r}{\left(1 + \frac{EqL'}{E'q'L}\right) mgS\cos\varphi + \frac{Eqr^2}{L}} \tag{2}$$

wo L, q, E, bzw. L', q', E' Länge, Querschnitt und Dehnungsmodul des Bandes, bzw. des Platinfadens bedeuten; r ist der



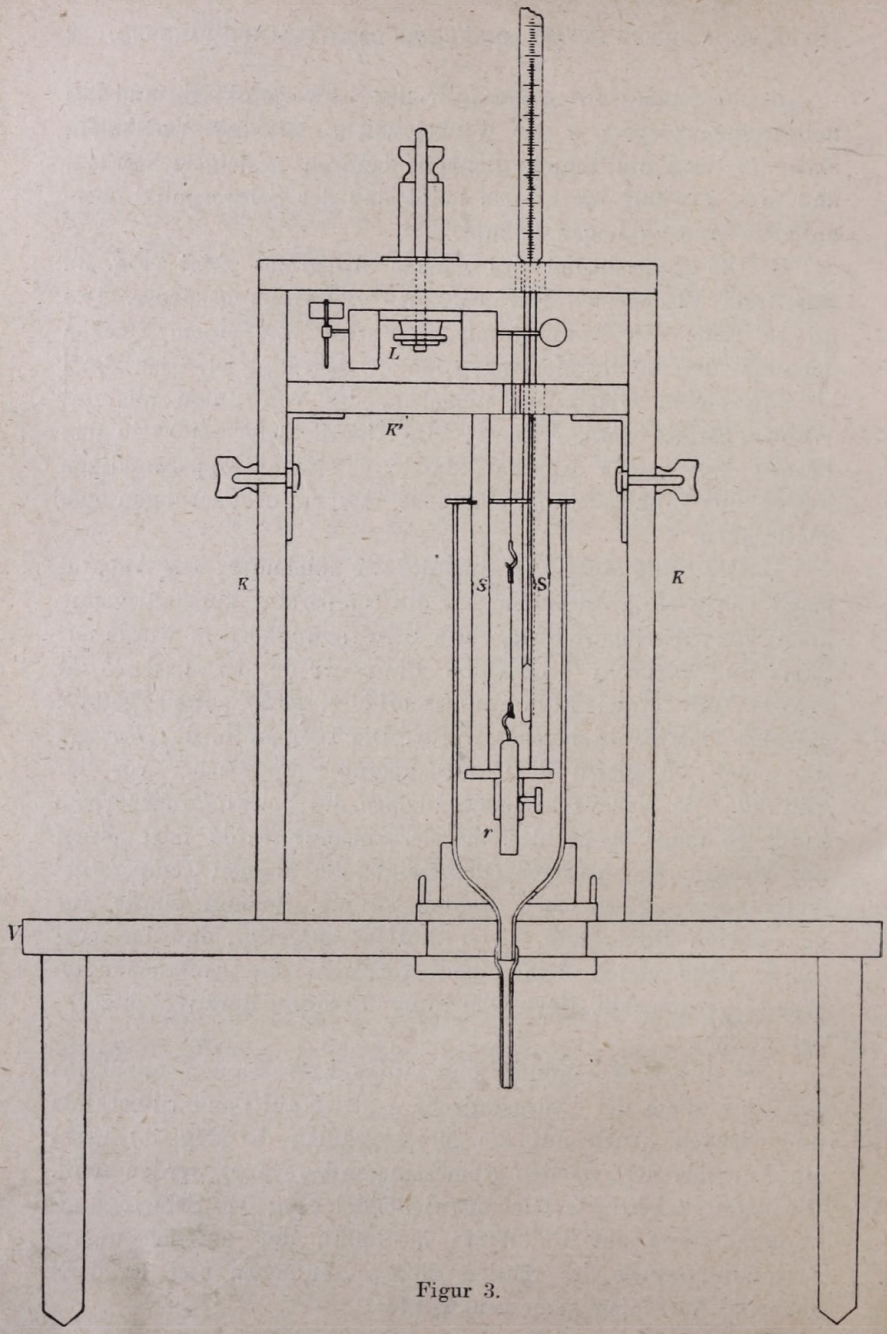
Figur 2.

Radius des Stabes D, m Masse, S der Schwerpunktsabstand des Schwingungskörpers, φ der Winkel von s mit der Vertikalen. Nach (2) kann die Empfindlichkeit dadurch gesteigert werden, daß man $\varphi > 90°$ macht, das heißt, daß der Schwerpunkt oberhalb der Axe zu liegen kommt.

4. Die Einrichtung des ganzen Apparates zeigt (Fig. 3). Das feste Eisengestell KK trägt den Schwingungskörper. Das untere Ende des Aluminiumbandes wird von einem Hacken gehalten, der an die Messingsäulen SS befestigt ist. Das Band ist von einem Glasbecher umgeben, der von unten aus mit Wasser gefüllt werden kann; ein Thermometer reicht in den Becher. Der ganze Apparat stand in einem doppelwandigen Kasten aus Zinkblech um plötzliche Temperaturänderungen auszuschließen.

5. Der Gang eines Experimentes war folgender: Der Apparat stand ruhig einige Stunden, bis die Temperatur konstant genug blieb; die Gleichgewichtslage des Schwingungkörpers wurde mit Skala und Fernrohr beobachtet. Dann wurde der Becher mit Wasser (mit etwas Aluminiumchlorid versetzt) soweit gefüllt, daß der Platindraht benetzt wurde. Die Temperatur des Wassers war möglichst gleich der Lufttemperatur im Becher vor der Füllung. Die neue Gleichgewichtslage des Schwingungskörpers wurde so lange beobachtet, bis sie konstant wurde oder einen nur kleinen regelmässigen Gang zeigte, der kleinen Temperaturänderungen zugeschrieben werden konnte. Sodann wurde auf den oberen Silberklotz soviel Gewicht aufgelegt, daß der Ausschlag nahe gleich demjenigen war, den das Eintauchen im Wasser verursachte. Nach Gleichung (2) konnte daraus P berechnet werden.

Bei dieser Berechnung sind einige Korrektionen anzubringen; vor allem der hydrostatische Auftrieb auf Band, Silberklotz und Hacken. Auch auf die Messingsäulen SS (Fig. 3.) wirkt ein Auftrieb, der aus den Abmessungen berechnet werden kann. Die dadurch bewirkte Gleichgewichtsänderung des Schwingungkörpers wurde auf die Weise bestimmt, daß auf das untere Verbindungsstück der Säulen 23·4 gr. aufgelegt und der dazu gehörige Ausschlag gemessen wurde.



Figur 3.

6. Es muss erwogen werden, daß das Aluminiumband möglicherweise Wasser absorbiert und hiedurch seine Länge ändert. Diese Längenänderung ist unabhängig von den Querabmessungen des Bandes; deshalb ist diejenige Belastung, die dieselbe Längenänderung bewirkt, proportional der Dicke δ und der Breite s des Bandes; die rechte Seite der Gleichung (1) ist also durch ein Glied $Bs\delta$ zu ergänzen. Statt (1) ist zu schreiben

$$p = 2sF(1-\mu) + Bs\delta \tag{3}$$

und

$$\frac{p}{2s(1-\mu)} = F + \frac{B}{2(1-\mu)}\delta = F + A\delta. \tag{4}$$

Die Assorption wird also dadurch bemerkbar, daß $P2s(1-\mu)$ eine lineare Funktion der Dicke ist. Darum wurden die Messungen auf Bänder verschiedener Dicke erstreckt.

7. Es mußten natürlich Bänder von möglicht gleicher Oberflächenbeschaffenheit hergestellt werden. Die käufliche Folie war 0·01 mm dick; sie wurde mit Natronlauge und Alkohol gereinigt, sodann in Natronlauge gehängt, bis die Dicke unter Wasserstoffentwickelung etwa auf die Hälfte sank; danach hing das Band ca 12 Stunden in reinem Wasser. Nach der Messung wurde das Band abermals in Natronlauge verdünnt, wieder gemessen, u. n. w. bis zu 0·002 mm Dicke. Die Dicke wurde mit einer Nemetz-schen Mikrowage bestimmt, mit der $^1/_{200}$ mg noch gemessen werden konnte.

Die Versuche müssen als erste Probe betrachtet werden hauptsächlich deshalb, weil die gleiche Oberflächenbeschaffenheit augenscheinlich nicht einwandfrei verwirklicht werden konnte. Die Aluminiumfolie war nicht homogen und rein genug; nach der Behandlung mit Natronlauge bildeten sich öfters kleine, in Wasser unlösliche weiße Flecken auf dem Bande: es wurde nur an möglichst fleckenlosen Bändern gemessen.

Als Beispiel einer Messung diene Band 58:

δ	$\frac{p}{2s(1-\mu)}$
0·0058 mm.	66 mg/mm
0·0042 «	63 «
0·0032 «	59 «
0·0023 «	54 «

Diese Resultate sind darstellbar durch

$$\frac{p}{2s(1-\mu)} = 47 + 0{\cdot}34.10^4\,\delta$$

Daraus ergibt sich $F = 47$ mg/mm.

In Wasser getaucht dehnt sich das Aluminiumband aus; die Oberflächenspannung ändert sich im Sinne, daß sie die Grenzfläche zu vergrößern strebt.

8. Es wurde an 6 fleckenlosen Bändern gemessen mit folgendem Resultate:

Band	F in mg/mm	s in mm	δ in mm
58	47	3·63	0·0058 — 0·0023
59	34	2·13	0·0045 — 0·0025
60	37	3·52	0·0045 — 0·0031
61	40	3·30	0·0056 — 0·0022
63	34	3·73	0·0051 — 0·0035
66	43	2·32	0·0071 — 0·0021.

Die Zahlen unter δ geben die größte, bezw. kleinste Dicke.

Das Mittel der F Worte beträgt 39 mg/mm; das will sagen: kommt Aluminium aus Luft in Wasser, so ändert sich die Oberflächenspannung des Aluminiums um 39 mg/mm in dem Sinne, daß sich die Grenzfläche zu vergrößern strebt. Obige Zahl soll nur die Größenordnung von F angeben, da die Messungen an Genauigkeit noch viel zu wünschen übriglassen. Sobald eine Besserung der jetzt so trostlosen Lebensverhältnisse es gestattet, sollen die Versuche fortgesetzt werden.

7.

ÜBER EINE NEUE BILDUNGSWEISE DER PROTOCATECHUSÄURE.[1]

Von FRITZ v. KONEK,

O. M. DER AKADEMIE.

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 22. Mai 1922.[2]

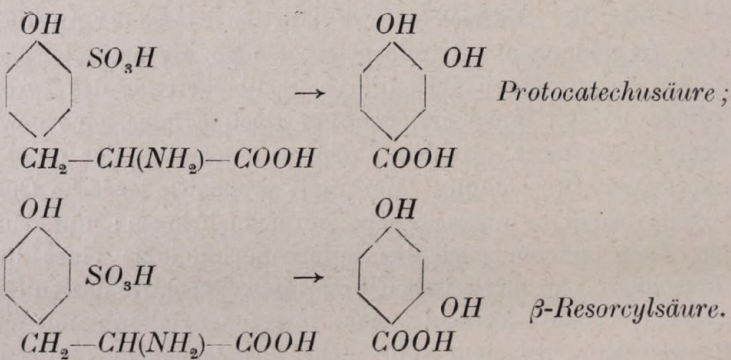
Unter den zahlreichen Vertretern der Klasse der Antiluetica oder Verbindungen mit spirochetentötenden Eigenschaften haben in den letzen Jahren auch die Quecksilberderivate des Tyrosins infolge der mit ihnen erzielten günstigen Erfolge, eine gewisse Bedeutung erlangt. Mit dem Probleme beschäftigt, das unter der geschützten Bezeichnung «Merlusan» propagirte basische Quecksilbertyrosinat in wasserlösliche Form zu bringen: untersuchte ich unter anderen auch die Sulfurirungsprodukte eines linksdrehenden Tyrosins tierischen Ursprungs, respektive dessen Salze. Behandelt man Tyrosin oder *p*-Oxyphenylalanin mit conc. Schwefelsäure bei einer 100° nicht übersteigenden Temperatur, so bildet sich fast ausschließlich nur eine, in der Literatur längst bekannte Monosulfosäure. Obwohl es nach den allgemeinen Substitutionsregeln der aromatischen Chemie von allem Anfang

---

[1] Mitteil. aus d. I. und III. Chem. Inst. d. Universit. und dem Organtechnol. Laborat. der Chem. Zentr. Versuchs-Station zu Budapest.

[2] Ungarisch erschienen unter dem Titel: *A protocatechusav egy új képződési módjáról*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akad. der W.) Bd. XXXIX. (Budapest, 1922.), S. 259—260.

an mehr als wahrscheinlich schien, daß der Schwefelsäurerest auch im Tyrosin — als in einer para. Oxyverbindung — die Orthostellung zum Hydroxyl gegenüber der zum Alaninrest bevorzugen würde: ist diese Analogieschlußfolgerung experimentell noch nicht bewiesen worden. Es ist mir nun gelungen diese Unsicherheit durch die Kalischmelze der Tyrosinmonosulfosäure und genaue Untersuchung der hiebei entstandenen Produkte, endgültig zu beseitigen. Der wiener Forscher v. BARTH war der Erste, der in den fünfziger Jahren des vorigen Jahrhunderts Tyrosin als solches mit Kali verschmolz, und als einziges Reaktionsprodukt, unter oxydativer Abtrennung der Alaninseitenkette, die Bildung von *p*-Oxybenzoësäure feststellte. Überträgt man nun diese Reaktion auf die Monosulfosäure des Tyrosins, so muß infolge des regelrechten Ersatzes der Sulfogruppe durch Hydroxyl — je nach deren relativer Stellung im Benzolkern — entweder ein Pyrocatechin — oder ein Resorcinderivat entstehen:



Das Experiment hat nun vollkommen eindeutig und zwar im Sinne von Konfiguration I. entschieden: indem das reine tyrosinsulfosaure Baryum, respektive das aus ihm durch doppelten Umsatz mit Glaubersalz bereitete Natriumsalz, beim Verschmelzen mit festem Kali oder Natron in der Silberschale; Zersetzen der Schmelze mit Säure und Extrahiren mit Äther ausschließlich nur reine, kristallisirte Protocatechusäure lieferte, welche mit Eisenchlorid die für Orthodioxybenzole charakteristische smaragdgrüne Färbung, und mit Säure anderen Ursprungs —

aus reinem Protocatechualdehyd mit Silberoxyd bereitet — keine Schmelzpunktsdepression gab und deren Zusammensetzung schließlich auch noch durch titrimetrische und Elementaranalyse bestätigt wurde. Aus diesen experimentellen Befunden folgt der zwingende Schluß, daß sich der Schwefelsäurerest in der Monosulfosäure des Tyrosins ausschließlich in Ortho — und nicht in Meta — zum Hydroxyl befindet und daß diese längst bekannte Verbindung somit die Konfiguration I. besitzt, nachdem sie in der Kalischmelze ausschließlich nur Protocatechusäure liefert, und die an ihrer intensiven violetten Eisenchloridreaktion leicht kenntliche, stellungsisomere Resorcylsäure selbst in Spuren nicht gebildet wird. (Die diesbezüglichen Versuche hat Herr Cand. Chem. Franz Gruzl ausgeführt.)

8.

ÜBER EINE EIGENARTIGE VERKETTUNG VON ARYLAMINOSÄUREN MIT IHRESGLEICHEN UND MIT ALIFATISCHEN AMINOSÄUREN.

Von FRITZ v. KONEK,

O. M. DER AKADEMIE.

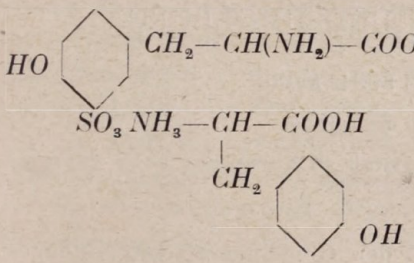
(Vorläufige Mitteilung.)

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 22. Mai 1922.[1]

Im Laufe meiner Studien über die Tyrosinsulfosäure, ihre Derivate, Salze und Umwandlungsprodukte machte ich unter anderen auch die Beobachtung, daß eine wässerige Lösung der freien Säure im Stande ist bei Siedehitze eine ganz beträchtliche Menge an freiem Tyrosin aufzunehmen, während Letzteres in siedendem Wasser allein so gut wie unlöslich ist. Quantitative Versuche überzeugten mich des weiteren, daß ein Molekulargewicht Sulfosäure befähigt ist bis zu einem Molekulargewicht Tyrosin zu lösen. Ein Teil des Reaktionsproduktes scheidet sich aus den Lösungen beim Abkühlen in kristalliner Form ab, während der andere durch Vakuumkonzentration gewonnen werden kann. Freie Tyrosinsulfosäure löst aber auch andere Aminosäuren; vorläufig untersuchte ich ihr Verhalten gegenüber Glycin und Asparaginsäure mit demselben Resultate wie gegen Tyrosin. Obwohl die so erhaltenen neuen Produkte noch nicht genügend

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Aromás és alifás aminosavak új kapcsolódási módjáról*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der W.) Bd. XXXIX. (Budapest, 1922.) S. 265—266.

charakterisiert und vollständig analysiert sind, so kann ich doch bereits jetzt mit ziemlicher Sicherheit behaupten, daß es sich in diesen Falle nur um eine ähnliche Salzbildung handeln kann, wie man sie auch in den freien Aminosäuren selbst und hauptsächlich in den Betaïnen anzunehmen pflegt, so zwar, daß der Sulfosäurerest der Tyrosinmonosulfosäure mit der Aminogruppe eines Tyrosinmoleküls eine Ammonsulfitsalz ähnliche Bindung eingeht und den so entstehenden Produkten die folgende Konstitution beizulegen sein würde:



«*Tyrosinsulfosaures Tyrosin.*»

Es handelt sich also in diesem Falle um eine neue, durch die Sulfogruppe vermittelte Bindungsart aromatischer Aminosäuren, wobei die eine der Kontrahenten nicht blos der aromatischen, sondern auch der alifatischen oder heterocyklischen Reihe der Aminosäuren angehören kann.

Die verhältnissmäßig leichte Bildung dieser «heteronuclearen Sulfobetaïne» verdient schließlich auch theoretische Beachtung, nachdem sie als Beweis gelten kann für die stärkere Acidität der Sulfogruppe gegenüber der Carboxylgruppe. Während es durch Kochen von Tyrosin in wässeriger Solution nicht möglich ist die Carboxylgruppe eines Tyrosinmoleküls mit der Aminogruppe eines Anderen in salzartige Bindung zu bringen, also quasi ein «tyrosinsaures Tyrosin» darzustellen, gelingt dies nach meinen Beobachtungen mit Leichtigkeit im Falle der Tyrosinsulfosäure.[1]

Eine ausführliche Beschreibung dieser Versuche und Charakteristik der erhaltenen neuen Verbindungen soll in einer späteren Mitteilung erfolgen.

[1] Vergl. hiezu die neuesten Anschauungen über Betaïne von P. Pfeiffer, Ber. 55. (1922.) 1762. und ff.

9.

ÜBER DIE NEUESTE GEOLOGISCHE KARTIERUNG VON BUDAPEST UND UMGEBUNG.

Von FRANZ SCHAFARZIK.

O. MITGLIED DER AKADEMIE.

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 10. Dezember 1921.[1]

Im Jahre 1919 beschloß der Gemeinderat von Budapest eine geologische Neuaufnahme des Weichbildes der Hauptstadt, und zwar im Katastral-Massstabe 1 : 5000 ausführen zu lassen. Es sollte dieselbe namentlich im Interesse des hauptstädtischen Ingenieurs-Korps bewerkstelligt werden. An diesen Neuaufnahmen beteiligten sich Chefgeologe H. HORUSITZKY (Pester Seite der Hauptstadt), Chefgeologe M. PÁLFY und Sektionsgeologe Z. SCHRÉTER (Nördliche Hälfte des Ofner Gebirges) und Prof. FRANZ SCHAFARZIK (Südliche Hälfte desselben Gebirges).

Die geologische Aufnahme des eigentlichen Stadtgebietes wurde zum besseren Verständnis, namentlich in SW-licher Richtung weit über seine Grenzen hinaus bis Bia, Sóskút und Érd ausgedehnt, wobei sich zahlreiche Neuaufschlüsse und Gesichtspunkte zur besseren Würdigung des Terrains ergeben haben.

---

[1] Der Verfasser legte gleichzeitig den bereits geologisch kolorierten Teil der Karten des südwestlichen Teiles von Budapest vor.

Die Arbeit erschien ungarisch unter dem Titel: *Budapest székesfőváros legújabb geológiai térképezéséről*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Math. und Naturw. Anzeiger der Ung. Akademie der Wiss.) Bd. XXXIX. (Budapest, 1920). S. 181—198.

Die Formationsglieder, aus denen der SW-liche Teil des Ofner Gebirges besteht, sind folgende:

1. Der *Hauptdolomit*, als die älteste Formation im Ofner Gebirge. Bisher wurde derselbe ausschließlich als zur norischen Stufe der oberen Trias angesehen, doch gelang es dem Vortragenden in einer hornsteinreichen Region desselben auf dem klippenartigen Felsrücken der Teufelskanzel auch Reste von *Ostrea Montis caprilis*, Klipst. zu finden, die nach L. Lóczy im benachbarten Bakonyer Walde für die Torer Schichten der oberen Mergelgruppe bezeichnend sind. Es kann demgemäss als erwiesen betrachtet werden, daß gewisse Regionen des Ofner Dolomites selbst in die karnische Stufe hinabreichen, wodurch sich nicht nur eine Erweiterung der Altersgrenzen nach unten, sondern auch ein neueres Glied in der Übereinstimmung des Ofner Grundgebirges mit dem Bakony ergeben hat.

2. *Nummuliten-Kalk.* (Obereozäne Stufe.) Die im Mittel-Eozän einsetzende kontinentale Senkung hielt im Ober-Eozän weiter an, so, daß der Nummuliten-Kalk des transgredierenden Meeres das Grundgebirge in ausgiebiger Weise bedeckte. Heute aber findet sich der Nummuliten-Kalk bloß unter dem besonderen Schutze gewisser Deckschichten hie und da als ein noch vorhandener Lappen, wie z. B. an der Südseite der Zitadelle am Blocksberge. Ein anderer Punkt, wo dieser Kalkstein zu Tage tritt, befindet sich im hauptstädtischen Walde, an der Kuppe Maria-Eichel. Ein dritter Punkt hat sich westlich von Budakesz am westlichen Rande des «Biaer Berges» ergeben. An allen drei Orten haben sich außer den bekannten Nummuliten und Orthophragmiten keine neueren paläontologischen Elemente gezeigt.

3. Die «*Bryozoen Schichten*». Diese Stufe besteht aus Konglomeraten und aus an Bryozoen und Foraminiferen reichen Kalkmergelschichten. Bekanntlich hat Karl Hofmann diese Schichten im Jahre 1871 ins oberste Eozän gestellt. Später wurden sie von *Maximilian von Hantken* ins untere Oligozän eingereiht. Neuestens endlich hat sich Viktor Vogel[1] in dieser

[1] Vogel Viktor: Az eocén- és oligocén-képződmények határa Budapest környékén. Anton Koch Festschrift. Budapest, 1912, p. 153.

Kontroverse, und zwar zu Gunsten der HANTKENschen Auffassung ausgesprochen.

In petrogenetischer Beziehung ist der Zusammenhang der Bryozoenschichten mit den liegenden Nummuliten-Kalken nicht überall ein so inniger, wie im Altofner Schöntal, da man anderwärts — wie dies übrigens seinerzeit schon von HOFMANN beobachtet wurde [1] — zwischen ihnen und den Nummuliten-Kalken eine gewisse Diskordanz nachweisen kann. Zufolge der Erhebung der nördlicheren Teile des Ofner Gebirges kamen die Bryozoenschichten in einem tieferen Niveau zur Ablagerung, wohingegen in den südlichen Gebieten bei Budaörs, wo das Gebirge einigermassen gesunken ist, die Bryozoenschichten über die Nummuliten-Kalke übergreifend sich direkt auf dem Dolomit des Grundgebirges abgelagert haben. Es sind dies sichere Anzeichen für die stattgehabten vertikalen Krustenbewegungen, ebenso wie zugleich für die gleichzeitige Transgression der Bryozoenschichten. In den südlichen Gebieten, namentlich SW-lich vom Blocksberg beginnt die Reihe der Sedimente nach der Niveauveränderung mit mächtigen Strandkonglomeraten, so daß die eigentlichen Bryozoenschichten erst über diesem Konglomerat-Lager zur Sedimentation gelangt sind. Unanfechtbar kann dies am Blocksberg, Rupp-Hügel, an der Teufelskanzel, sowie an anderen Punkten beobachtet werden. Diese Basis-Konglomerate haben als das Produkt der Transgression stellenweise abgerissene Felsstücke des Nummuliten-Kalkes umschlossen oder aber finden wir ihre Rollstückchen in die Spalten des Nummuliten-Kalkes versenkt, woraus anzunehmen ist, daß der Kalkschlamm des Nummuliten-Kalkes zu dieser Zeit bereits diagenetisch verfestigt gewesen war.

4. *Der Ofner Mergel.* Diese kalkreichen, oft bereits kalkmergelartigen Bänke nehmen ihren Platz über den Bryozoenschichten mit ganz allmähligem Übergange ein. Nummuliten und Orthophragmiten treten in ihnen bloß spärlich auf, andererseits aber sind sie an Bryozoen und Foraminiferen reich und

[1] K. HOFMANN. Die geologischen Verhältniße des Ofen-Kovácsier Gebirges. Mitt. a. d. Jb. d. kön. ung. Geologischen Anstalt. I. Band. Budapest, 1872. pag. 205.

ebenso findet man Krinoiden-Stielglieder, sowie einzelne Stachelhäutler ziemlich zahlreich in ihnen. Stratigraphisch gehören sie dem Unter-Oligozän an. Der Ofner Mergel ist eigentlich als eine im Vorfelde der Meeresufer-Region stattgehabte Sedimentation zu betrachten, die mit den an den Ufern befindlichen Bryozoenschichten insoferne im Zusammenhange stehen, als daß sich zeitweise, vielleicht zufolge temporärer Strömungen von den Ufern eine Konglomeratbank zwischengelagert hat. Als eine solche ist z. B. jene ziemlich grobe Konglomeratbank zu erkennen, die in den Gräben des Deutschen Tales bloßliegt, sowie ferner jene kleinkörnigeren und schwächeren Bänke die am Aufstiege der Sashegy-Gasse beobachtet werden können. Alle beide Vorkommen waren bereits auch K. Hofmann bekannt.

In diesen alttertiären Ablagerungen habe ich keine nennenswerten paläontologischen Funde gemacht, jedoch sei an dieser Stelle erwähnt, dass ich in unmittelbarer Nähe unseres Gebietes, nämlich an der SO-Seite des Rosenhügels im Ofner Mergel auf ein reiches Echiniden-Lager gekommen bin, daß ich am 2. November 1921 in der Hantken-Festsitzung der Ung. Geol. Gesellschaft eingehender besprochen habe.

5. *Der Kleinzeller Tegel.* Vorwiegend blaugraue kalkigtonige, nach der Schichtung schlechtspaltende Schichten, die stratigraphisch sich in voller Übereinstimmung mit dem Ofner Mergel ebenfalls als unteroligozän erweisen, wie dies bereits von K. Hofmann[1] betont wurde. Makro- und Mikrofauna ist dieselbe, während jedoch der Ofner Mergel näher vor den Ufern zur Ablagerung gelangt ist, wurde der Kleinzeller Tegel als pelitische Fazies weiter ab von den Ufern sedimentiert.

Bezeichnend hiefür ist, daß bereits 3—4 km von den einstigen Ufern des Ofner Gebirges im Profile des artesischen Brunnens im Pester Stadtwäldchen bei einer Mächtigkeit von 326·5 m, des an tieferer Regio nabgelagerten Kleinzeller Tegels vom Ofner Mergel bereits gar nichts mehr zu bemerken war. Es ist daher klar, dass der Sedimentationsprozess von den litoralen Bryozoen führenden Konglomeraten an bis hinaus in die See

[1] K. Hofmann l. c. pag. 218. ff.

ein organisch zusammenhängender war. Jedoch war das Ofner Gebirge noch vor dem völligen Ablaufe der unter-oligozänen Zeit weiteren Senkungen ausgesetzt, so daß das Meer in positivem Sinne vorrücken konnte. Damit wanderten auch die verschiedenen Detritus-Ablagerungszonen gegen den Kontinent, und zwar in dem Maße, daß z. B. der feinere tonige Schlamm bereits in einzelnen Buchten zur Sedimentation gelangt ist. Dies ist die Ursache dessen, daß der Kleinzeller Tegel über die Kristinenstadt vordringend sich selbst im engen Tale des Teufelsgrabens absetzen konnte. An den meisten Stellen mochte der Kleinzeller Tegel auf diese Weise über den Ofner Mergel geraten sein. Diese Art der Transgression hatte bereits auch Karl Roth v. Telegd wahrgenommen, indem er die Bemerkung aussprach, daß das Vordringen des Meeres seinen Höchstpunkt zur Zeit der Bildung des Kleinzeller Tegels erreicht hat.

Die nun folgende *mittel-oligozäne* Stufe dürfte zwar in der ununterbrochenen Reihe der vorhandenen Oligozänschichten wohl ebenfalls vorhanden sein, konnte aber bei der vorwiegenden und sich gleichbleibenden Foraminiferen-Fazies dieser Sektion gesondert nicht nachgewiesen werden.

6. *Oberoligozän.* Landhebung bewirkte den Rückzug des tiefen Meeres, so daß am Rande des Ofner Gebirges in subpelagischem Gewässer mehr-weniger grobe Sande mit reichen Faunenresten zur Ablagerungen gelangen konnten. Hofmann beschrieb die schöne Fauna mit *Pectunculus obovatus* von Törökbálint, während neuestens aus den Aufschlüssen am Kőér-Bache eine ähnliche Fauna mit 38 Arten zu Tage gefördert werden konnte.[1]

7. Die *untere (I) Mediterranstufe (Bourdigalien)*; grobe schotterige Sande, stellenweise mit Andesit-Tuffeinlagerungen. Diese reiche Fauna gleicht jener von Eggenburg und umfasst bisher 41 Arten. Der Ort ihrer Ablagerung ist der südliche Rand des Ofner Gebirges zwischen Budafok (Promontor) und Bia. Die gesamte Ablagerung ist marin.

---

[1] Kulcsár K.: Ein neueres Vorkommen von Oberoligozän zu Budafok und Törökbálint. Földt. Közlöny, XLV. Bd., 1915, p. 187.

8. Die *obere (II) Mediterranstufe (Vindobonien).* Sande, Sandsteinmergel und Lajthakalke, deren Ablagerungen besonders am Nordrande des Tétényer Plateaus verfolgt werden können. Schöne Aufschlüsse haben die am Plateau angelegten Laufgräben geliefert, aus denen 50 schöne marine Arten gesammelt werden konnten.

9. Die *sarmatische Stufe (Sarmatien).* Am soeben erwähnten Tétény—Diósder Plateau liegen vorwiegend Grobkalke, mit leichtem Einfallen nach Süden. Die Fauna dieser bereits weniger salzigen Meeresteile ist zwar an Individuen sehr reich, umfasst aber ausser Foraminiferen bloß 10 grössere Arten. Bemerkenswert ist darin eine spanndicke Einlagerung eines an Zirkonkriställchen ausserordentlich reichen Biotit-Rhyolith-Tuffes.

10. Die *Pontische Stufe (Pontien)* erstreckt sich auf grosse Gebietsteile bei Diósd—Tétény und Érd und umfasst, wie es scheint sämtliche Étagen vom *Lyrceen*-Horizont an bis hinauf zu den Schichten mit *Unio Wetzleri* am Molnár-Berge bei Érd. Das Meer dieser Stufe war bereits stark ausgesüßt.

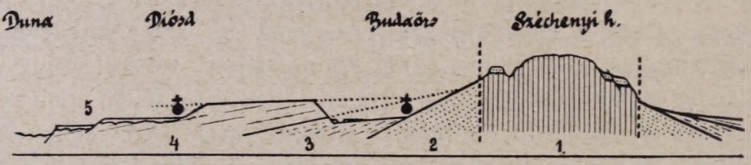
11. Die *levantinische Stufe (Levantin),* die auf den linksuferigen Gebieten der Donau bei P.-Szt.-Lőrincz in klassischer Weise ausgebildet ist, erscheint auf dem südlichen Teile des Ofner Gebirges bloß durch ältere Travertino-Absätze der einstig höher ausfliessenden Thermen vertreten.

12. Die *pleistozäne Stufe (Quartär)* kann entlang der Donau in Form von hochgelegenen Schotterterrassen-Resten beobachtet werden. Ferner gehören hieher die meisten der höhergelegenen Travertino-Terrassen, u. a. die wohlbekannte Kleinzeller Terrasse bei Altofen.

13. Die *holozäne Stufe.* Zu dieser Zeit erlangte das hauptstädtische Terrain seine heutige Physiognomie. Ausgestaltung des Bachgeäders südlich des Ofner Gebirges. Niedersteigen der Thermalquellen zum Niveau der heutigem Donau. Ebenso gehören hieher gewisse Deflazions-Erscheinungen an sandigen Bodenstellen.

Schließlich die tektonischen Verhältnisse des südlichen Ofner Gebirges betreffend sei erwähnt, daß dasselbe unzweifelhaft dem Ungarischen Mittelgebirgszuge angehört und wie dieses

im Allgemeinen auch hier durch SW—NO-liche Längs- und NW—SO-liche Querbrüche in Schollen zerlegt wird. Besonders sei ferner hervorgehoben, daß das Ofner Gebirge gegen Osten eben bei Budapest durch die nord-südlich verlaufende «Thermenlinie» gegen das Alföldbecken zu scharf abgeschnitten wird. Gegen Süden dagegen findet man dem Grundgebirge die ganze tertiäre



Figur 1.

Die diapirartige Antiklinale als die Grundform in der Tektonik des südlichen Teiles des Ofner Gebirges.

1 = Obertriadischer Dolomit; 2 = Eozän und Unteroligozän; 3 = Oberoligozän; 4 = Neogen; 5 = Pleistozäne und holozäne Gebilde.

Schichtenfolge von Eozän an bis zu den *Unio Wetzleri*-Schichten der pliozänen Stufe normal angelagert, und zwar die alttertiären Stufen steiler, die jüngeren aber allmählig immer flacher einfallend, so dass unser Gebirgsanteil im Querprofil eine *diapir*-artige Anordnung zur Schau trägt, wie dies am Blocksberg, am Adlerberg, am Ruppberg, u. a. O. erkannt werden kann und aus der beistehenden Figur ersichtlich ist.

10.

KUPFERKIES VON BOTES IN SIEBENBÜRGEN.

Von BÉLA MAURITZ.

O. M. DER AKADEMIE.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. März 1918.[1]

Im Jahre 1902 untersuchte ich die ungarischen Kupferkiese, welche sich in der Mineralien-Sammlung des Ungarischen Nationalmuseum befinden.[2]

Darunter befanden sich einige Kupferkieskristalle von Botes. Dieselben hatten einen Durchmesser von 3—8 mm, waren dabei unregelmäßig und verzerrt ausgebildet, äußerst stark gerieft mit matten oder blau angelaufenen glänzenden Flächen. Im ganzen war es möglich sechs Formen zu bestimmen: die Bisphenoide $\{111\}$ und $\{1\bar{1}1\}$, das Protoprisma $\{110\}$ und die Deuterobipyramiden $\{101\}$, $\{201\}$, $\{605\}$. Zwillinge fanden sich nach dem Bisphenoide. Zur kristallographischen Untersuchung war das Material nicht besonders geeignet.

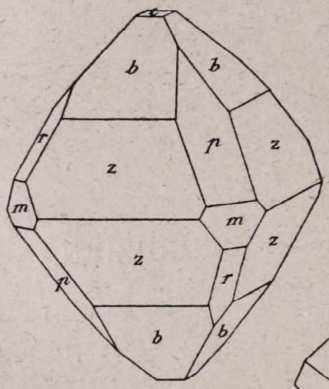
Im Jahre 1911 besuchte ich das Siebenbürgische Erzgebirge und bei dieser Gelegenheit fand ich in dem Gruben von Botes (Komitat Alsó-Fehér) derartig schöne Mineralienstufen, deren Kupferkieskristalle als erstklassige zu bezeichnen waren.

---

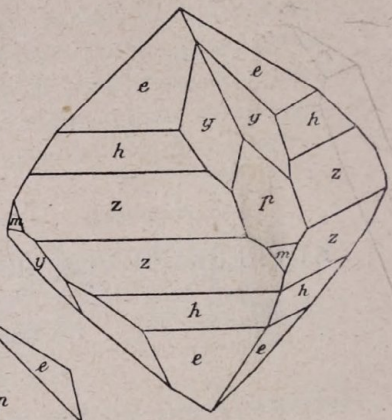
[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: *A botesi chalkopyrit*, Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Ak. d. Wiss.) Bd. XXXVI., (Budapest 1918) p. 539—547,

[2] Annal. hist.-nat. Musei Nationalis Hungarici XXV. 448—476. (1902) und Zeitschrift f. Kristallographie und Min. XL. 588. (1905).

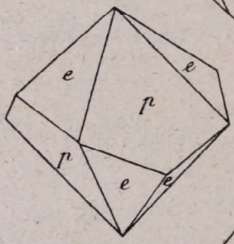
1.


c
b
b
r
f
z
z
m
m
z
z
r
f
b
b

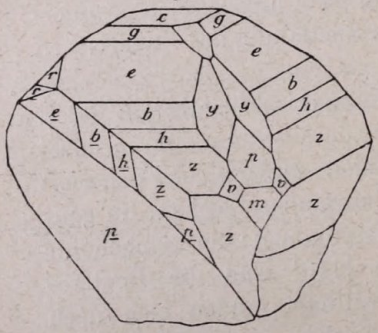
2.


e
e
g
g
h
h
z
z
f
m
z
m
z
y
z
h
h
e
e

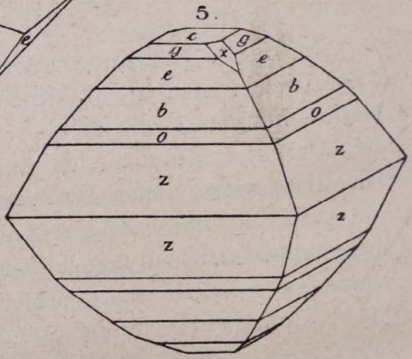
3.


e
e
f
f
e
e

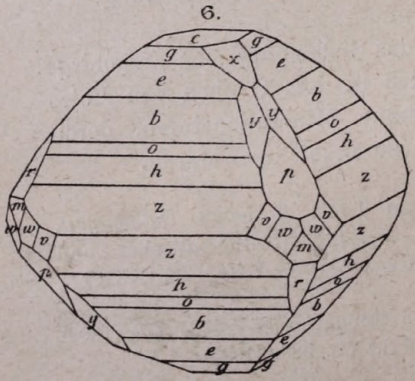
4.


c
g
g
e
r
e
b
h
y
y
e
b
b
h
z
z
f
v
v
z
m
z
f
f
z

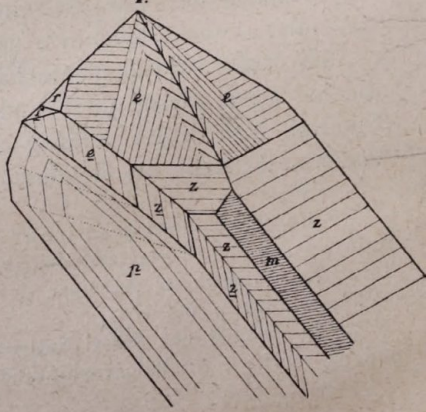
5.


c
g
y
x
e
e
b
b
o
o
z
z
z
z

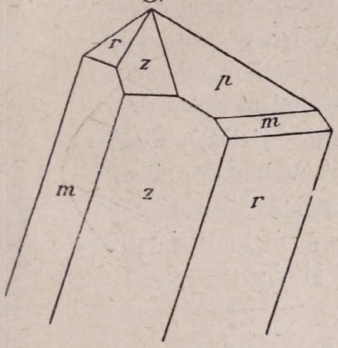
6.


c
g
g
x
e
e
b
b
y
y
o
o
h
r
h
f
z
m
z
v
v
v
w
w
w
z
z
m
f
h
r
e
h
o
b
b
y
e
e
g
g

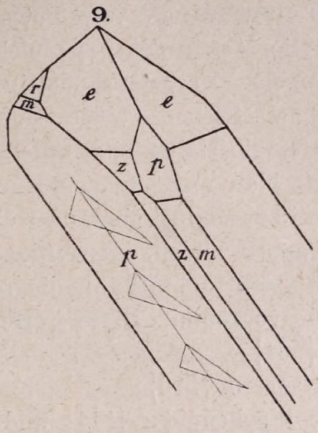
7.


r
x
e
e
e
z
z
z
z
m
f
z

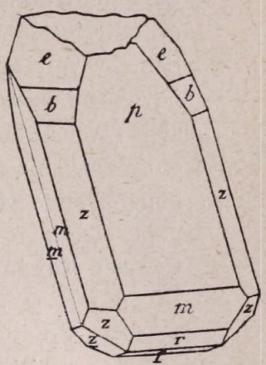
8.



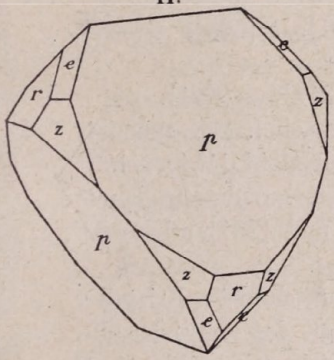
9.



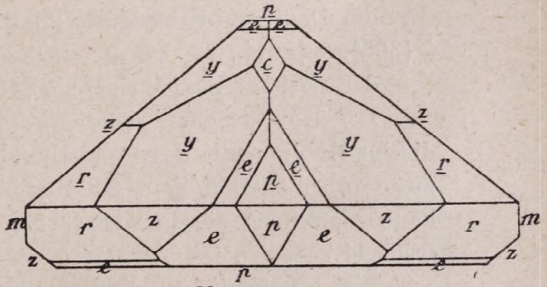
10.



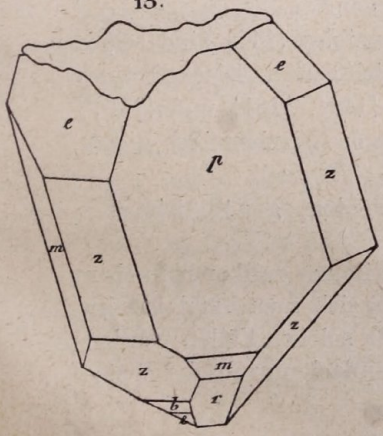
11.



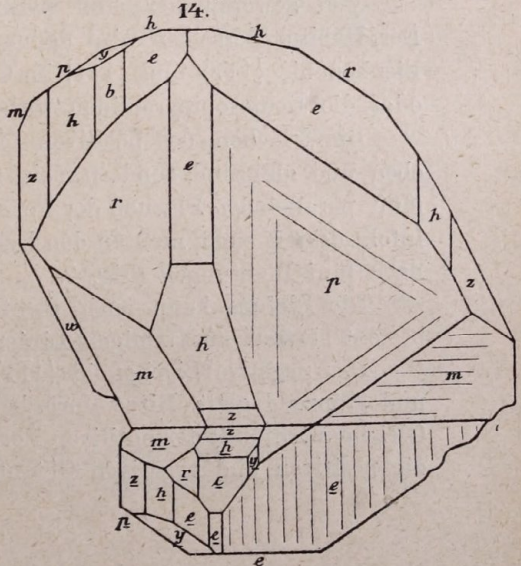
12.



13.



14.



Die Gold-Tellurerzgänge von Botes traten in Karpaten-Sandstein auf. Die Matrix der gesammelten Stufen besteht aus glimmerigschiefrigem Karpatensandstein, welcher mit einer Schicht von aufgewachsenen weißen Quarzkristallen überzogen ist. Auf diesen Quarzkristallen sitzen die glänzend mettalfartigen, stellenweise bloß blau angelaufenen Kupferkieskristalle, welche entweder ganz frei ausgebildet sind, oder dicht aneinander sitzend kugelförmige Gruppen bilden. Es wurden an denselben 14 Formen sicher festgestellt, eine Zahl, die nur noch an Kristallen weniger Fundorte vorkommt. Diese Formen sind:

die Bass $c\{001\}$;

das Protoprisma $m\{110\}$;

das positive Bisphenoid $p\{111\}$ und $x\{113\}$;

das negative Bisphenoid $r\{1\bar{1}1\}$;

die Deuterobipyramide $g\{203\}$, $e\{101\}$, $b\{605\}$, $o\{504\}$, $h\{302\}$, $z\{201\}$;

der positive Skalenoëder: $y\{313\}$, $v\{311\}$, $w\{641\}$.

Der Habitus der Kristalle ist sehr wechselnd. Der sphenoidische Habitus mit dem vorwaltenden Bisphenoid $\{111\}$ gehört zu den seltenen Fällen. An Kombinationen von diesem Typus kann man noch die Formen $\{1\bar{1}1\}$, $\{101\}$ und $\{201\}$ erkennen. (Fig. 11.)

Viel gewöhnlicher sind pyramidal ausgebildete Kristalle. Der Habitus derselben wird dadurch bedingt, daß entweder die Bisphenoide $\{111\}$ und $\{1\bar{1}1\}$ im Gleichgewicht ausgebildet sind, oder die Deuterobipyramiden vorherrschen.

Die Flächen des positiven Bisphenoides $\{111\}$ sind selten eben und glänzend, sondern meist zierlich gerieft. Diese Riefung läuft parallel den Flächen der Formen $\{101\}$, $\{201\}$ und $\{110\}$; infolgedessen sieht man an den Flächen des Bisphenoides Riefen nach fünf Richtungen (Fig. 7).

Die Riefung kann auch dichter werden, gewöhnlich aber besteht sie nur aus wenigen Linien.

Das negative Bisphenoid $\{1\bar{1}1\}$ ist immer vollkommen eben und glänzend glatt. Diese Form befindet sich manchmal fast im Gleichgewicht mit der positiven Form. In solchen Fällen wurden die positiven und negativen Oktanten einfach nur in der Weise

unterschieden — wie es schon SADEBECK[1] und SCHIMPER[2] vorgenommen haben, daß als positiv die gerieften Bisphenoidflächen angenommen wurden und als negativ die ebenen und glänzenden.

Die Flächen des Bisphenoides $x\{113\}$ konnten bloß in den positiven Oktanten aufgefunden werden. Dieselben sind stets klein, meistens kann man sie sogar nur an den Polkanten der Deuterobipyramiden in Form geriefter Zähne erkennen (Fig. 7). An solchen Kristallen kann auch das Bisphenoid $\{111\}$ fehlen oder wird es nur in der Riefung der abwechselnden Polkanten der Deuterobipyramide $\{101\}$ erkennbar sein (Fig. 7).

An einigen Kristallen kann man in der Zone der positiven Bisphenoide kleine, rauhe unvollkommene Flächen erkennen, deren Winkelwerte denen der Form $n\{112\}$ nahe stehen; jedoch kann man diese Form nicht als sichergestellt bezeichnen.

An einem einzigen Kristall waren nur die Formen $\{111\}$ und $\{101\}$ und zwar im Gleichgewicht ausgebildet, so daß die Kombination einen mittelkristallartigen Habitus hatte. (Fig. 3.)

Die untersuchten Kristalle waren aber doch zumeist von pyramidalem Typus, da ihre vorherrschenden Formen die Deuteropyramiden sind. Es wurden sechs Deuterobipyramiden sicher festgestellt, von denen drei, nämlich $\{201\}$, $\{101\}$, $\{605\}$ mit großen Flächen entwickelt sind. Es gibt Kristallindividuen, an denen man mit freiem Auge nur die Form $\{101\}$ erkennt und die Flächen der Bipyramiden $\{201\}$ und $\{605\}$ nur in der dichten horizontalen Riefung versteckt sind. An solchen Individuen ist diejenige Hälfte der Flächen der Bipyramide $\{101\}$, welche in den positiven Oktanten liegt, mit den Flächen der Form $\{111\}$ parallel gestreift. Die andere Hälfte in den negativen Oktanten dagegen zeigt eine horizontale Streifung. Diese beiden Riefungen stehen senkrecht aufeinander und sind schön symmetrisch verteilt (Fig. 7). Von einer viel steileren pyramidalen Tracht sind diejenigen Kristalle, auf denen die Bipyramide $\{201\}$ vorherrschend ist; die Flächen derselben sind entweder glatt und

---

[1] Zeitschrift der Deutsch. Geol. Gesellsch. XX. 595; 1868.

[2] GROTH, Mineraliensammlung d. Universität Strassburg 53; 1878.

vollkommen glänzend oder aber ebenfalls fein horizontal gestreift (Fig. 1).

Sehr auffallend und im Reiche der Kristalle etwas ungewöhnlich ist das herrschende Auftreten einer Form von solch hohen Indices, wie $b\ \{605\}$. Ich hatte bereits anläßlich meiner ersten Untersuchung der Kupferkieskristalle von Botes Gelegenheit, diese Bipyramide festzustellen, ja ich fand sogar Kristalle, und zwar Zwillinge, an welchen diese Form allein vorhanden war. Obzwar im jetzt vorliegenden Material keine derartigen Kristalle vorhanden waren, kann ich doch behaupten, daß diese Form für die Kupferkieskristalle von Botes äußerst charakteristisch ist, nachdem sie fast an sämtlichen Kristallen, wenn auch nur in Form von feinen Linien, jedoch immer zu erkennen ist. In vielen Fällen aber erscheint sie als herrschende Form. Formen mit hohen Indices sind an Kupferkiesen anderer Fundorte schon längst bekannt, so z. B. Kristallen von French Creek in Pennsylvanien von PENFIELD [1] festgestellt. Die Flächen der Bipyramide $\{605\}$ sind entweder vollkommen glatt, oder äußerst stark und dicht horizontal gestreift (Fig. 1 und 5). Die Bipyramide $h\ \{302\}$ wird nie zur herrschenden Form, obzwar ihre Flächen hie und da bedeutendere Dimensionen erreichen (Fig. 2). Die Bipyramide $o\ \{504\}$ kann man in der gerieften Zone der Deuteropyramiden nur in Form von feinen Leisten erkennen (Fig. 5); die Bipyramide $g\ \{203\}$ erscheint zwischen der Basis und der Bipyramide $\{101\}$ nur mit schmalen Flächen, welche immer sehr uneben oder geätzt erscheinen. Die Basis ist an den meisten Kristallen vorhanden, aber nur als eine unbedeutende kleine, kaum auffallende Fläche; an einigen Individuen bildet sie etwas größere schwach glänzende Quadrate (Fig. 5—6). Das Protoprisma ist eine gewöhnliche Form; die Ausbildung und Grösse seiner Flächen ist sehr veränderlich; dieselben sind gewöhnlich dicht und äußerst fein horizontal gestreift (Fig. 7).

Von den drei bestimmten Skalenoëdern ist $y\ \{313\}$ das gewöhnlichste; seine Flächen erscheinen meist zwischen den Formen $\{111\}$ und $\{101\}$ als glänzende schmale Leisten (Fig. 2.

[1] American Journal of Science. 1890. 207.

und 6). Ferner wurde nur ein Kristall gefunden, an welchem diese Form dominierender auftritt und dadurch die Kombination eine skalenoëdrische Tracht erhält. Dieses Skalenoëder ist schon längst bekannt an Kupferkieskristallen anderer Fundorte, so z. B. ist es eine gewöhnliche Form an den Kristallen von Kapnik. Die beiden andern Skalenoëder jedoch sind für den Kupferkies überhaupt neu. Das Skalenoëder $w\,\{641\}$ wurde nur an einem Kristall zwischen den Flächen der Formen $\{110\}$ und $\{201\}$ als eine einzelne breite glänzende Fläche bestimmt (Fig. 14); trotz aller Mühe konnte ich diese Form an keinem weiteren Kristall wiederfinden. Die Größe und Ausbildungsweise dieser Fläche lassen diese Form zweifellos erkennen. Das dritte Skalenoëder $v\,\{311\}$ erscheint an mehreren Kristallen mit mehreren Flächen, welche immer klein, unbedeutend und glanzlos sind; ihre Bestimmung wird dadurch erleichtert, daß sie in den beiden Zonen $(201).(110)$ und $(111).(1\bar{1}\bar{1})$ liegen (Fig. 6). Negative Skalenoedër sind keine vorhanden. Als unsicher muß man das Skalenoedër $s\,\{513\}$ erklären, welches nur mit einer glänzenden, aber schwach gerieften Fläche zwischen den Flächen $\{111\}$ und $\{201\}$ erkennbar war. Die gefundenen Winkelwerte weichen von dem berechneten ziemlich ab:

	obs.	calc.
$(513).(111) =$	$29°37\frac{1}{2}'$	$28°25'$
$(513).(201) =$	$9°26'$	$10°40\frac{1}{2}'$

Die Fig. 6 gibt eine Kombination sämtlicher Formen, welche an den Kupferkieskristallen von Botes beobachtet worden sind; sämtliche 14 Formen kommen nie zusammen an einem Kristall vor; diese ideale Kombination will nur die Rangordnung der Formen anzeigen. Gleichfalls ideale Bilder sind Fig. 1, 2, 5, 6 und 11. Die Kupferkieskristalle von Botes sind fast immer stark und äußerst charakteristisch verzerrt, so wie es Fig. 4, 7—10 und 12—14 zeigen. Die gewöhnlichste Verzerrung besteht darin, daß eine der Bisphenoidflächen $\{111\}$ sehr groß wird, der Kristall erscheint dann nach dieser Fläche plattgedrückt und außerdem in einer Richtung in die Länge gezogen; so sind an Fig. 7 und 9 die Flächen $(1\bar{1}\bar{1})$ großgewachsen und dabei

ist der Kristall parallel der Kante $(20\bar{1}).(021)$ verlängert; auf der Fläche $(1\bar{1}1)$ erscheint zumeist eine zierliche dreiseitige Zeichnung, deren Linien parallel den Flächen von (101) und $(1\bar{1}0)$ verlaufen (Fig. 9). Seltener nimmt eine Fläche der Bipyramide $\{201\}$ bedeutendere Dimensionen an (Fig. 8); solche Kombinationen sind gleichzeitig parallel der Kante $(1\bar{1}0).(20\bar{1})$ in die Länge gezogen. Die auf beiderlei Weise verzerrten Kristalle erscheinen etwa stumpf speerförmig.

Einfache Kristalle sind sehr selten; fast sämtliche untersuchten Kristalle erwiesen sich als Zwillinge. Der Kupferkies bildet Zwillinge nach mehreren Gesetzen; gewöhnlich sind nur Zwillinge nach dem Gesetze: *Zwillingsebene eine Fläche des Bisphenoides* $\{111\}$ *bzw.* $\{1\bar{1}1\}$. Dabei verwachsen miteinander ungleichwertige, nämlich positive und negative Bisphenoidflächen, wie es schon Sadebeck festgestellt hatte. Die Zwillinge dieser Art sind immer äußerst verzerrt (Fig. 4 und 7). Fig. 10 bildet einen Zwilling, welcher parallel der Zwillingsfläche plattgedrückt ist und infolgedessen rhombisch-hemimorphe Symmetrie zeigt. Meist erscheint am Zwillinge eines der Individuen nur in Form einer der Zwillingsebene parallelen dünnen Schicht (Fig. 4, 7 und 12), an welcher die übrigen Formen nur durch ganz kleine Flächen vertreten sind; das andere Individuum ist ziemlich simmetrisch ausgebildet. Auf der mit der Zwillingsebene parallelen großen Bisphenoidfläche erscheinen zierliche Schraffen parallel den Flächen vom $\{101\}$ und $\{201\}$. Fig. 12 zeigt solch einen Zwilling in der Aufstellung, nach welcher die Zwillingsebene auf die Bildebene senkrecht zu stehen kommt.

Besonders gut ausgebildet war der Zwilling (Fig. 14), nach dem Gesetz: *Zwillingsebene eine Fläche der Bipyramide c* $\{101\}$. Dieses Gesetz wurde am Kupferkies zuerst von Haidinger im Jahre 1822 erkannt,[1] aber etwas später, im Jahre 1825 zweideutig ausgedrückt.[2] Infolgedessen entstand darüber eine jahrelang dauernde Debatte. Sehr eingehend beschäftigten sich mit

[1] Haidinger: Memoirs of the Wernerian Society. IV. 1. (1822).
[2] Haidinger: Edinburgh Journal of Science III. 68. (1825).

dieser Frage NAUMANN,[1] SADEBECK,[2] SCHIMPER,[3] FLETCHER[4] und BAUMHAUER[5].

Richtig wurde die Frage endlich von FLETCHER gelöst. Bei der Untersuchung der Kupferkieskristalle von Kapnik fand ich gleichfalls einen Zwilling, welcher nach diesem Gesetze verwachsen war. In beiden Fällen entsprechen die Winkelwerte genau dem Zwillingsgesetz, wie dasselbe von FLETCHER bestimmt worden ist, nämlich *Zwillingsebene eine Fläche der Bipyramide* $c\{101\}$. Die zugehörigen Winkelwerte sind:

	obs.	calc.
$(101).(\overline{101})$	$= 1°43'$	$1°42'$
$(111).(\overline{111})$	$= 1°25'$	$1°23\frac{1}{2}'$

Winkelwerte der neuen Formen $w\{641\}$ und $v\{311\}$:

	obs.	calc.
$(311).(111)$	$= 29°30'$	$29°31\frac{1}{4}'$
$(311).(110)$	$= 31°38'$	$31°37'$
$(311).(001)$	$= 72°14'$	$72°12\frac{1}{4}'$
$(311).(201)$	$= 19°19'$	$19°17\frac{1}{2}'$
$(311).(131)$	$= 50°27'$	$50°24'$
$(641).(110)$	$= 13°50'$	$13°50'$
$(641).(201)$	$= 37°06'$	$37°04\frac{1}{2}'$

[1] NAUMANN: Lehrb. der Kristallographie II. 281. (1830).

[2] SADEBECK: Zeitschr. d. D. Geol. Gesellsch. XX. 595; XXI. 642; XXX. 601.

[3] SCHIMPER: GROTH, Mineraliensammlung der Univ. Strassburg. 53. (1878).

[4] FLETCHER: Phil. Mag. XIV. 266. (1882) und GROTH's Zeitschrift für Krist. u. Min. VII. 321. (1882).

[5] BAUMHAUER: GROTH's Zeitschr. f. Krist. u. Min. XXV. 465. (1902).

11.

ADULAR AUF DEN ERZGÄNGEN DER UNGARISCH-SIEBENBÜRGISCHEN ANDESITE.

Von BÉLA MAURITZ,

K. M. DER AKADEMIE.

Vorgelegt in der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften den 21. Mai 1918.[1]

Die Adular-Varietät des Kalifeldspates ist in Ungarn-Siebenbürgen ein seltenes Mineral. An einigen Stellen findet man das Mineral in dem kristallinen Schiefern. ACKNER[2] gibt als Fundort die Umgebung des Zoodt-Baches (Riu Saduluj) im Komitat Szeben, wo er das Mineral in den «Granit-Syenit-Gängen» und in den Bach-Geröllen gefunden hat. MÁRTONFI[3] beschreibt dasselbe vom Magura-Berg bei Szilágy-Somlyó (Komitat Szilágy) und zwar aus Höhlungen des kristallinen Schiefers; derselbe Autor[4] beschäftigte sich auch mit dem Vorkommen bei Macskamező (Komitat Szolnok-Doboka), wo das Mineral im Gneis des Kecskés-Berges vorkommt.

Viel interessanter sind die Fundorte in den Erzgängen der ungarisch-siebenbürgischen Andesite. Von solchen Vorkommen

---

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: *Adulár a hazai andezitek ércteléreiben*, Math. és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Ak. d. Wiss.) Bd. XXXVII. (1920.) p. 37—39.

[2] Mineralogie Siebenbürgens. Hermannstadt. 20. (1855).

[3] Siebenbürg. Museumverein. Medicin.-naturwiss. Berichte. XIII. 10. (Klausenburg, 1888).

[4] Daselbst. XVII. 349. (1892).

waren bis jetzt bekannt: Schemnitz, von Wiser [1] erkannt und von Bischof [2] analysiert; Oravicza im Banat, von Tschermak [3] beschrieben; ziemlich verbreitet ist das Mineral in den andesitischen Erzgängen von Felsőbánya (Komitat Szatmár), besonders in Leves-bánya in Begleitung von Wolframit.[4] K. Hofmann [5] fand das Mineral im östlichen Teil des Vihorlat-Gutin-Gebirges bei Tótos (Komitat Mármaros) als aufgewachsene Kristalle in Spalten des «Orthoklas-Trachytes».

Am meisten verbreitet ist der Adular in dem andesitischen Erzgängen des siebenbürgischen Erzgebirges. J. Szabó [6] und A. Koch [7] beschreiben eingehend das Vorkommen von Verespatak; G. Benkő [8] dasselbe von Karács, Becke [9] erwähnt es in der Gesellschaft des Hessit von Botes. In der Arama-Grube (Napoleon-Stollen) bei Bucsum fand ich im Jahre 1911. eine gewaltige Erzstufe, welche reichlich Adular enthielt. Die Mineralien der Erzmasse waren die folgenden: grobkörniger Bleiglanz innig mit dichter Zinkblende gemengt; dichter und kristallisierter Schwefelkies (gestreifte Pyritoeder), wenig Kupferkies, auf den Spaltrissen Quarznädelchen, auf welchen als letzte Bildung Adularkristalle sitzen. Manchmal erscheint auch noch eine zweite Quarzgeneration aus äußerst dünne Nädelchen bestehend, die jünger ist als der Adular.

Der Adular ist milchweiß, eisartig aussehend. Derselbe sitzt zumeist auf den Quarznadeln, welche die Wände der Risse und Nester auskleiden. Die Adularkristalle haben einen Durchmesser von 1—2 mm und sind sehr einfach ausgebildet; man erkennt an ihnen nur das dritte Pinakoid $c\{001\}$ und das Prisma dritter

---

[1] Neues Jahrbuch f. Min. Geol. Pal. 1850. 429.
[2] Daselbst. 1850. 46.
[3] Sitzungsberichte Akad. Wien. Math.-naturw. Classe LIII. I. 220.
[4] Zeitschr. Kryst. XI. 211.
[5] Földtani Közlöny (Geol. Mitth.). II. Bd. 1873 pag. 75.
[6] Daselbst.
[7] Értek. a term. tud. köréből. VIII. Budapest.
[8] Siebenbürg. Museumverein. Medicin.-naturwiss. Berichte. XXII. 198. (1888).
[9] Tschermak's Min. petr. Mitth. III. 301.

Art $m\{110\}$. Infolgedessen zeigen die Kristalle eine rhomboedrische Tracht. Die Prismenflächen sind matt, das Pinakoid glänzend, aber in horizontaler Richtung stark gestreift. Das Nebengestein besteht aus Andesit, welches kaolinartig zersetzt und stellenweise verquarzt ist.

Es ist höchst wahrscheinlich, daß der Adular auch auf anderen andesitischen Erzgängen vorkommt, nur ist es möglich, daß das anspruchslose Mineral leicht übersehen wird. Krusch, Vogt und Beyschlag[1] haben auf die wichtige Rolle der Kalisilikatlösungen in den andesitischen Erzgängen aufmerksam gemacht, der gemäß *Adular nur in den stärker umgewandelten «propylitisierten» Gesteinen vorkommt und der Bestand des Minerals durch Auslaugung des Nebengesteins hervorgebracht wird.*

[1] Die Lagerstätten der nutzbaren Mineralien und Gesteine. II. 31.

12.

DIE MINERALIEN VOM BERGWERKE LUCIABÁNYA IM ZIPS-GÖMÖRER ERZGEBIRGE.

Von † B. BARADLAI.[1]

Luciabánya liegt in der Nähe von Jászó im Qellengebiete des *Boldva*-Flusses (Komitat Abauj-Torna). Das Bergwerk wurde bereits von L. MADERSPACH[2] erwähnt. Früher wurden daselbst hauptsächlich Kupfererze abgebaut, derzeit aber wendet sich das Interesse hauptsächlich den Eisenerzen zu. Das Nebengestein der Erzlagerstätten besteht teils aus einem schwarzen, glänzenden, graphitähnlichen und teils aus einem fast kreideweissen Tonschiefer. Die Bildung der Erzlagerstätten lässt sich vielleicht auch hier auf dasjenige Eruptivgestein zurückführen, welches F. SCHAFARZIK[3] zwischen Rosenau und dem Göllnitz-Flusse nachgewiesen hat. Mit diesem Eruptivgestein — einem dynamometamorph umgewandelten *Quarzporphyr* nämlich — sind die meisten der Eisenerzlagerstätten dieses Gebirges innig verbunden und genetisch nach H. BÖCKH durch die posttriadische Granit-Instrusion dieser Gegenden bedingt.

Die Mineralassociation von Luciabánya kann als reich erklärt werden. Das Haupterz bildet der grobblätterige *Eisen-*

---

[1] Diese Abhandlung des Verfassers, der im Weltkriege rühmlichen Heldentod erlitt, wurde nach den geordnet hinterlassenen Notizen durch B. MAURITZ zusammengestellt und der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 8. Nov. 1920 vorgelegt. Ungarisch erscheint dieselbe unter dem Titel: *Luciabánya ásványai a Szepes-Gömöri Érchegységben* im Mathematikai és Természettudományi Értesítő Bd. XL. (Budapest, 1923.)

[2] Magyarország vasércfekhelyei. (Eisenerzlagerstätten Ungarns.) Budapest, 1880. Seite 77.

[3] Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XXIII.

spat, in dessen Hohlräumen kleine *Siderite*- und glänzende dunkelstahlgraue *Fahlerz*-Kriställchen aufsitzen, von denen letztere oft gelb oder bunt angelaufen sind.

Das Fahlerz bildet aber gleichzeitig auch bedeutendere derbe Massen, aus welcher grössere und etwas gestreifte Fahlerzkristalle herauswachsen. In Eisenspat eingewachsen findet sich der *Schwefelkies*, dessen Kristalle manchmal einen Durchmesser von mehreren Centimetern erreichen und als herrschende Formen das Hexaeder, Oktaeder und das Pyritoeder aufweisen. Der ebenfalls vorhandene *Kupferkies* bildet gewöhnlich bunt angelaufene derbe Massen; seine Kristalle sind zumeist äusserst unvollkommen. Der derbe Kupferkies und das derbe Fahlerz durchwachsen einander oft auf das innigste. *Antimonit* kommt nur in geringer Menge in dünnen Nadeln vor. Sehr selten, aber in schönen Kristallen erscheint der Bournonit, der bis jetzt von dieser Lokalität unbekannt war. Die Erze werden von wasserklaren oder gelblichen Quarzkristallen begleitet, die zumeist tafelig verzerrt sind.

Die *Bournonit*-Kristalle, die einer genauen Untersuchung unterworfen worden sind, stammen von zwei Eisenspatstufen. Der Durchmesser dieser Kristalle schwankt zwischen 2—8 mm; sie sind metallglänzend und nicht angelaufen. Ihre Begleitmineralien sind: wasserhelle Quarzkristalle und äusserst dicht gestreifte Kupferkiesindividuen. Der Habitus der Bournonitkristalle ist stumpf pyramidal oder nach dem dritten Pinakoid tafelig; es gibt unter ihnen einfache Kristalle, Zwillinge und Drillinge.

Beobachtete Kristallformen (Fig. 1.):

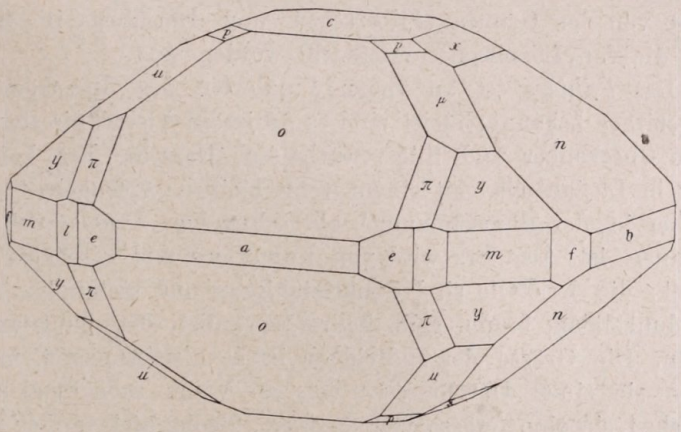
die drei Pinakoide: $a\{100\}$, $b\{010\}$, $c\{001\}$;
Prismen 1. Art (Brachydomen): $n\{011\}$ und $x\{012\}$;
« 2. « (Makrodomen): $o\{101\}$;
« 3. « : $f\{120\}$, $m\{110\}$, $l\{320\}$, $e\{210\}$;
Bipyramiden: $y\{111\}$, $p\{223\}$, $u\{112\}$, $\pi\{212\}$.

Sämtliche 14 beobachtete Formen sind an Bournonitkristallen anderer Fundorte bereits bekannt.

Die Flächen des dritten Pinakoides sind allgemein gut ausgebildet und glänzend, ausgenommen die Zwillingskristalle, an denen diese Flächen etwas gestört, wenn nicht wellig erscheinen,

so wie es A. Schmidt[1] an den Bournonitkristallen von Nagybánya beobachtet hatte. Die Querfläche bildet breitere oder schmälere, glatte und glänzende Streifen, während die Längsfläche zwar auch glänzend, aber stark gestreift ist, so dass man diese beiden Pinakoide auf dem ersten Blick sofort unterscheiden kann.

Von den Prismen erscheint als herrschende Form $m\{110\}$ mit glänzenden oder fein gestreiften Flächen; $e\{210\}$ und $f\{120\}$



Figur 1.

sind ziemlich häufige Prismen, die aber nur in Form schmaler Streifen erscheinen; das Prisma $l\{320\}$ wurde nur an einem Kristall beobachtet.

Der pyramidale Habitus der Kristalle wird durch die grossflächigen Domen verursacht. Mit grossen gut glänzenden Flächen erscheint auch das Makrodoma $o\{101\}$ und das Brachydoma $n\{011\}$; die Form $x\{012\}$ aber war nur an einem Kristall durch eine einzige Fläche vertreten.

Mehr Abwechslung bot die Ausbildung der Pyramiden. Herrschende Bypiramide ist $u\{112\}$ mit glänzenden, bzw. parallel der Kante (112).(101) gestreiften Flächen. Die Bipyramide $y\{111\}$ spielt gewöhnlich eine mehr untergeordnete Rolle, da sie selten

[1] Naturhist. Hefte. Ungar. National-Museum. XIV. 208 (1891).

mit der vorigen Bipyramide im Gleichgewichte steht. Die Bipyramiden $\pi\{212\}$ und $p\{223\}$ sind seltene Formen mit matten oder wie geätzt erscheinenden Flächen.

Juxtapositionszwillinge oder Drillinge nach dem Prisma $m\{110\}$ findet man sehr oft.

Die Winkelwerte und das Achsenverhältnis stimmen mit den von Miers[1] bestimmten völlig überein. Habitus und Ausbildung der Bournonitkristalle von Luciabánya erinnert an diejenige von den Gruben «Silbersegen» und «Dorothea» in Clausthal, die von Luedecke[2] untersucht worden sind.

Das *Fahlerz* ist an vielen Fundorten des Zips-Gömörer Erzgebirges bekannt; meist sind es Antimonfahlerze, die stellenweise Quecksilber und Silber enthalten. Dasselbe Erz kommt auch in Luciabánya mit einem sehr kleinen Arsengehalt vor, welcher in der Bumsenflamme als schwacher Arsengeruch zu erkennen ist. Das Erz wird von Kupferkies und Eisenspat begleitet; die Kristalle sind dunkelstahlgrau und metallglänzend, oft dunkelblau, braun, gelb, hellrot, grünlich etc. bunt angelaufen. Die Grösse der Individuen ist sehr schwankend, meist haben sie einen Durchmesser von ca 5 mm, manchmal aber erreichen sie eine Grösse von 2—3 cm. Beobachtet wurden folgende Formen (Fig. 2—3.):

das Hexaeder $a\{100\}$, das Granatoeder $d\{110\}$, das positive und negative Tetraeder $o\{111\}$ und $o'\{1\bar{1}1\}$;

die positiven Triakistetraeder $n\{211\}$, $\mu\{411\}$, sowie das negative $n'\{2\bar{1}1\}$;

das positive Deltoiddodekaeder $r\{332\}$;

die positiven Hexakistetraeder $s\{321\}$, $x\{952\}$ und $f\{875\}$.

Im ganzen sind also 11 Formen bekannt, von denen fast auf allen Kristallen vorhanden die folgenden drei sind: $o\{111\}$, $d\{110\}$ und $n\{211\}$; ziemlich oft findet man: $o'\{1\bar{1}1\}$, $n'\{2\bar{1}1\}$ und $r\{332\}$; seltener sind: $a\{100\}$, $s\{321\}$ und $x\{952\}$; endlich sind $f\{875\}$ und $\mu\{411\}$ nur einmal beobachtet worden.

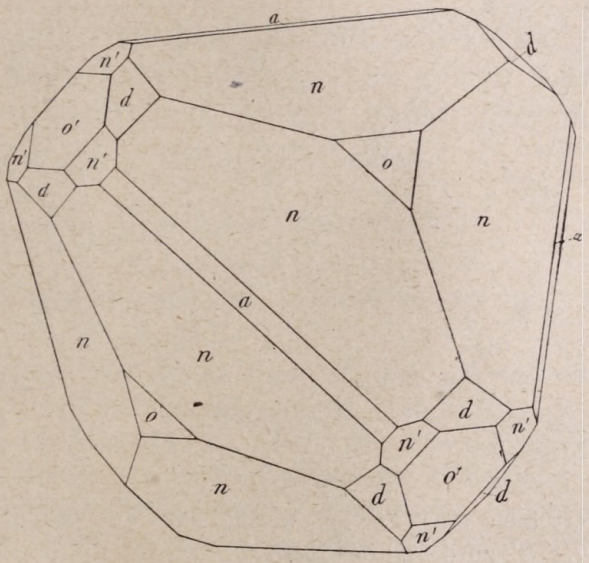
Der Habitus der Kristalle wird meist durch das positive

---

[1] Mineral. Magaz. VI. 59. (1884).

[2] Die Minerale des Harzes. 153. (Berlin, 1896.)

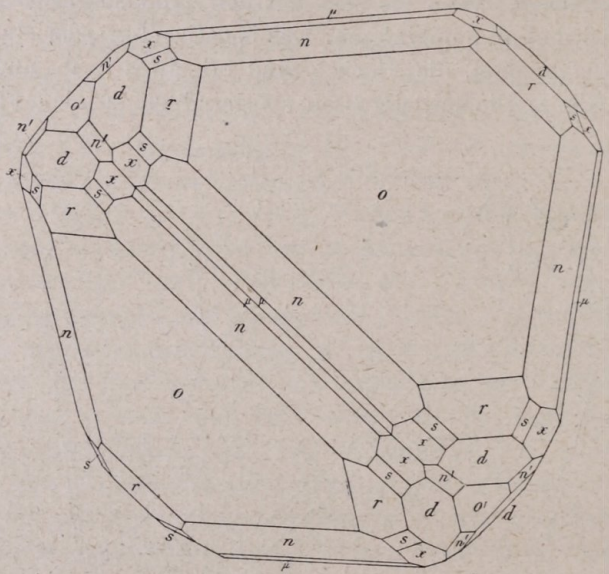
Tetraeder, seltener durch das Triakistetraeder $n\{211\}$ bedingt. Die Flächen des Tetraeders sind immer lebhaft metallglänzend, aber parallel den Tetraederkanten stark gestreift; die dreiseitige Streifung verläuft oft zick-zackartig. Treppenförmig werden die Tetraederflächen, wenn sie sich mit den Triakistetreaderflächen $n\{211\}$ wiederholt kombinieren. Das negative Tetraeder erscheint mehr untergeordnet, die Flächen sind oft etwas rauh und von mattem Glanz. Die mittelgrossen spiegelnd glänzenden Flächen



Figur 2.

des Granatoeders fehlen in keinem Falle. Das Deltoiddodekaeder $r\{332\}$ erscheint in Form von schmäleren-breiteren Streifen, welche parallel den Kanten rn stark gerieft sind; anderseits sind die Kanten ro oft ähnlich zackig verzerrt, wie an den Kristallen von Botes. Das negative Triakistetraeder $n'\{2\bar{1}1\}$ stumpft die Kante des Granatoeders in Form schmaler glänzender Streifen ab; die entsprechende positive Form bildet entweder ebenfalls nur schmale Streifen oder wird dieselbe zur herrschenden Form und verleiht dem Kristall den triakistetraedrischen Habitus; ihre Flächen sind öfters den Tetraederkanten

parallel gestreift. Das Hexaeder ist eine seltene Form; seine Flächen stumpfen die langen Kanten des Triakistetraeder $n\{211\}$ als ganz schmale Streifen ab. Nur an einem Kristall konnte man das Triakistetrader $\mu\{411\}$ beobachten; in der Zone dieser



Figur 3.

Formen erschien eine Fläche, welche sich auf die unsichere Form $\{17.2.2\}$ zurückführen liess.

Die Flächen der Hexakistetraeder sind glänzend und nicht gestreift. Die Form $x\{952\}$ war bisher am Fahlerz noch unbekannt; ihre Flächen erscheinen in der Zone (332).(321) und erreichen öfters beträchtlichere Dimensionen. Das Hexakistetraeder $f\{857\}$ ist gleichfalls neu am Fahlerz, wurde aber nur mit einer streifenförmigen Fläche in der Zone (111).(2$\bar{1}$1) beobachtet.

Winkelwerte der neu beobachteten Flächen:

	calc.	obs.
(111).(857) =	10°36′	10°31′
(2$\bar{1}$1).(857) =	51°17′	51°20′
(321).(952) =	6°23′	6°27′
(332).(952) =	20°45′	20°40′

13.

ÜBER DIE THEORIE UND ROLLE DER ZELLKERN-SEPARATIONSTEILUNG IN DER ENTWICKELUNGS-GESCHICHTE UND SYSTEMISIERUNG DER GEWÄCHSE.[1]

Von FERDINAND FILARSZKY,

O. M. DER AKADEMIE, BUDAPEST.

(Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wissenschaften am 17. Mai 1920.)

Bei der Vereinigung eines ♂- und ♀-Geschlechtselementes, also dem Befruchtungsvorgange (Amphimixis), der im Entstehen der Keimzelle, der Urzelle des neuen pflanzlichen Organismus gipfelt, spielen die beiden verschiedenwertigen Zellkerne die Hauptrolle. Infolge ihrer Verschmelzung, richtiger Fusion, entsteht in der Keimzelle der Keim- oder Zygotenkern, dessen verschiedenwertige Chromosomen nie miteinander verschmelzen, sondern bis zu Ende ihre Selbstständigkeit, Individualität bewahren. Die eine Gruppe derselben bilden die Chromosomen väterlicher Abstammung oder ♂-Chromosomen, die andere Gruppe die Chromosomen mütterlicher Herkunft oder ♀-Chromosomen.

Nachdem die Chromosomen im Allgemeinen als die Träger

---

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: *A separatiós sejtmagosztódás elmélete és szerepe a növények fejlődésében és rendszerezésében.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der Wiss.) Bd. XXXVIII, (Budapest, 1921) S. 238—248.

aller Eigenschaften und Merkmale des ganzen Organismus angesehen werden, müssen naturgemäß im Keimkern sämtliche Eigenschaften der Eltern schlummern.

Die Entwickelung des neuen pflanzlichen Organismus beginnt mit der Teilung des diploiden Keimkernes. Diese Teilung kann entweder eine Äquations- oder eine Reduktions-Teilung sein. Die Äquationsteilung geht immer oder doch zumeist mit der Längsspaltung sämtlicher Chromosomen vor sich, infolge dessen ihre Zahl vor Vollendung der Zweiteilung des Keimkernes sich verdoppelt, so daß dann schließlich den beiden Tochterkernen ebensoviel Chromosomen zufallen, als vor der Teilung im Mutterkern enthalten waren; die beiden Tochterkerne sind demnach gleichfalls diploid. Die Reduktionsteilung dagegen nimmt einen andern Verlauf. Die Zahl der Chromosomen bleibt hier bis zur Teilung unverändert, die Chromosomen spalten nicht, und bei ihrer Aufteilung gelangt die eine Hälfte in den einen, die andere Hälfte in den andern Tochterkern, so daß beide genau die auf die Hälfte reduzierte Chromosomenzahl des Mutterkernes aufweisen, demzufolge sie haploid sind.

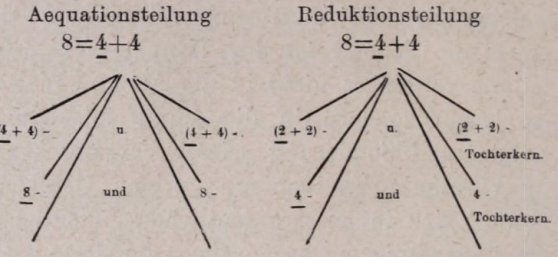
In beiden Fällen geht bei der Weiterentwickelung zum Zwecke des Aufbaues des neuen Pflanzenkörpers die weitere Teilung der Tochterkerne nur auf die typische Weise vor sich, doch tritt in jenen Fällen, wenn auch schon am Keimkerne eine Äquations- und nicht eine Reduktions-Teilung stattgefunden, im Entwickelungscyklus des neuen Organismus immer ein Zeitpunkt ein, in welchem auch eine einmalige Reduktionsteilung einsetzt. Diese führt dann entweder unmittelbar zur Bildung der haploidkernigen Geschlechtselemente oder hat die Bildung derselben nur später im Gefolge. Aus der Vereinigung dieser Elemente geht natürlich wieder eine Keimzelle mit einem diploiden Keimkerne hervor.

Die haploiden Zellkerne teilen sich nur in typischer Weise.

In der Literatur werden gewisse Phasen der Zellkernteilung, so insbesondere die Anordnung der Chromosomen in der Äquatorialebene verschieden beschrieben und gedeutet. Jedenfalls ist aber jene Erklärung als die glaubwürdigste anzunehmen, nach

welcher die dabei auftretende Anordnung als eine rein zufällige erschiene. Jedoch ist das Hauptgewicht des ganzen Zellkernteilungsvorganges nicht in die Art und Weise dieser Anordnung zu legen, sondern in die darauf folgende Chromosomen-Aufteilung und Sonderung. Dieser Vorgang kann immer nur nach in Vorhinein bestimmten, ererbten Gesetzen vor sich gehen, obwohl sich in ausserordentlichen Fällen auch eine Abänderung der regelmäßigen Chromosomen-Sonderung einzustellen vermag. Dieser hochwichtige Vorgang fällt also nicht in die Metaphasis, in welcher Phase die Chromosomen sich in der Äquatorialebene aufreihen, sondern vollzieht sich während der Anaphasis. Die Bildung von Geschlechtselementen, die einen aus entsprechend gleichwertigen, aber in Sonderfällen auch aus ungleichwertigen Chromosomen aufgebauten Kern enthalten, ist nur auf diese Weise denkbar oder mit andern Worten, die Art und Weise des Verlaufes der Anaphasis ist hier allein maßgebend, wobei den Zugfäden der Kernspindel unbedingt die Hauptrolle zufällt.

Sowohl bei der Reduktions-, als auch bei der Äquations-Teilung kann die Aufteilung der väterlichen (♂) und mütterlichen (♀) Chromosomen auf dreierlei Weise vor sich gehen. Entweder findet dabei eine vollständige Sonderung beiderlei Chromosomen statt, welchen Zellkernteilungsvorgang ich als die vollständige auch gleichmäßige Separationsteilung bezeichne —, oder ist die Sonderung beiderlei Chromosomen nur eine teilweise, partielle, unvollständige, bei welcher der eine Tochterkern mehr Chromosomen der einen Art, als der andere erbt und umgekehrt. Anderenfalls aber unterbleibt die Sonderung der zweierlei, verschiedenwertigen Chromosomen, indem die Äquations- oder Reduktions-Teilung sich ohne Separation vollzieht, die eine Hälfte der ♂- wie der ♀-Chromosomen fällt nämlich dem einem, die andere Hälfte dem anderen Tochterkerne zu. Alle drei Fälle mögen auch durch folgendes Schema veranschaulicht werden, in welchem z. B. ein diploider Mutterzellkern mit 8 Chromosomen angenommen wurde:



3. mit partieller Separation	(7+1)-	und	(1+7)-	(3+1)-	und	(1+3)-
	oder (6+2)-	und	(2+6)-	Chromosomen enthaltende Tochterkerne		
	oder (5+3)-	und	(3+5)-			

(Die unterstrichenen Zahlen bezeichnen die ♂-, die nicht unterstrichenen Zahlen die ♀-Chromosomenzahl.)

Die Ursache der Veränderlichkeit unter den Nachkommen ist nicht in der Reduktions-, sondern in der Separations-Teilung zu suchen und auch nur im Falle einer teilweisen Separationsteilung.

Wo bivalente Chromosomen auftreten, findet die Reduktion der Chromosomen wenigstens scheinbar schon im Mutterkerne statt, denn dieser weist unmittelbar vor der typischen Zweiteilung infolge Zusammentretens (nach Ansichten einiger Forscher infolge Conjugation) je zweier (angeblich verschiedenwertiger) Chromosomen, wahrscheinlich aber nur infolge weiteren Beisammenbleibens der durch Spaltung entstandenen Tochterchromosomen, bloß halb so viel bivalente Chromosomen auf, als derselbe Anfangs im Ruhezustande aus univalenten Chromosomen besessen hat. Das Resultat der Teilung ist dann dasselbe, wie bei der Reduktionsteilung, ob nun die Teilung eines solchen aus bivalenten Chromosomen bestehenden Zellkernes durch Zweispaltung der Doppelchromosomen stattfindet, oder ob die Teilung desselben durch Auseinanderweichen der die bivalenten Chromosomen bildenden univalenten Chromosomen vor sich geht.

Die Zahl der Chromosomen ist in den Zellkernen zumeist eine gerade, sie kann aber auch eine ungerade werden. Sie wird z. B. ungerade, wenn bei der Äquationsteilung eines Zellkernes mit gerader Chromosomenzahl die Zweispaltung eines

Chromosomes unterbleibt und infolge dessen dann dem einen Tochterkerne um ein Chromosom weniger Tochterchromosome zufallen, als dem andern. Der eine Tochterkern also kann dann eine gerade, der andere aber eine ungerade Zahl seiner Chromosomen aufweisen. Das ungespaltene Chromosom führt den Namen «Heterochromosom» wird aber auch «Idiochromosom» genannt. Es ist dasselbe immer in jenem Tochterkerne zu finden, der eine ungerade Chromosomenzahl aufweist, während der andere Tochterkern dafür ein überzähliges Chromosom besitzt. Je nachdem die Längsspaltung eines ♂- oder eines ♀-Chromosomes unterbleibt, kann auch das Heterochromosom entweder ein ♂- oder ein ♀-Chromosom sein.

Seltener wird die Chromosomenzahl dadurch ungerade, daß ein Chromosom aus der einen oder der anderen Gruppe ausgestoßen wird. In diesem Falle kann in dem so entstandenen, eine ungerade Chromosomenzahl führenden Zellkerne natürlich von einem Heterochromosom nicht die Rede sein, aber sein Schwesterkern wird ebenfalls ein überzähliges Chromosom führen, welches entweder von ♂- oder ♀-Werte sein kann.

Während die Heterochromosomen in der Zoologie eine große Rolle spielen, insofern man in ihnen die Speicher der das Geschlecht determinierenden Substanzen sieht, hat man im Pflanzenreiche statt ihrer nur Ähnliches, nämlich Chromatinnucleolen bei der Bildung der Pollenkörner mancher hermaphroditischen Blütenpflanzenarten beobachtet. Mit Hilfe der Separationsteilung läßt sich sowohl die Erscheinung der Heterochromosomen, als auch das der Chromatinnucleolen, sowie die sich daran knüpfenden Erklärungen leicht und deutlich bewerten, es läßt sich aber auch deutlich nachweisen, daß die Originalerklärungen nicht in Allem der Wirklichkeit entsprechen.

Der mehr-vielzellige Pflanzenkörper, sei es nun ein solcher von niederer oder höherer Organisation, wird aus vegetativen Zellen aufgebaut. Der Zellkern derselben ist wie der der einzelligen Organismen in den allermeisten Fällen ein ♂ ♀-Zellkern, doch kann er auch ein ♂- oder ♀-Zellkern sein und in beiden Fällen wieder ein haploider oder ein diploider Kern. Im Allgemeinen ein haploider Kern bei den Thallophyten und

Moosen, ein diploider bei den Gefäßkryptogamen und bei den Samenpflanzen. In allen Fällen, mit Ausnahme der allerniedrigsten pflanzlichen Organismen bilden sich zur Zeit der Geschlechtsreife der Individuen an bestimmten Stellen des Pflanzenkörpers Geschlechtsorgane, welche die zur Erhaltung und Fortpflanzung der Art nöthigen ♂- und ♀-haploidkernigen Geschlechtselemente erzeugen. Wenn die Äquationsteilung oder Reduktionsteilung des diploiden ♂ ♀-Keimkernes sich ohne Separation vollzieht, dann können sich aus der Keimzelle nur solche Pflanzenkörper entwickeln, deren sämtliche vegetative Zellen wieder ♂ ♀-diploide-, beziehungsweise haploide Zellkerne führen. Individuen jedweder Pflanzenart von solchem Aufbaue sind zur Reifezeit befähigt sowohl ♂- als auch ♀-Geschlechtsorgane zu entwickeln. Die Pflanzenart wird, wenn bei sämtlichen ihr zugehörigen Individuen diese verschiedenen geschlechtlichen Organe an verschiedenen Stellen, Sprossen ein und desselben Pflanzenkörpers zur Ausbildung gelangen, als monoecische Pflanzenart bezeichnet; wenn sich dieselben hingegen nahe zu einander auf ein und demselben, meist einem morphologisch stark modifiziertem Sprosse entwickeln, als hermaphroditische oder zwitterige Pflanzenart benannt. Nicht selten kommen jedoch ♂- und ♀-Geschlechtsorgane nur auf verschiedenen Individuen derselben Pflanzenart zur Ausbildung. Es sind dies dioecische Arten, welche nur so entstehen können, daß schon die Äquationsteilug oder Reduktionsteilung des Keimkernes in der Keimzelle unter Separierung der verschieden geschlechtlichen Chromosomen vor sich geht, wobei dann entweder nur der eine oder der andere diploide, beziehungsweise haploide Tochterkern von ♂- oder ♀-Geschlechtswerte den Ausgangspunkt zur Bildung eines ♂- beziehungsweise ♀-Individuums bildet, oder aber auch beide in freien Tochterzellen der Keimzelle zu Urzellkernen werden, aus denen zweierlei verschieden geschlechtliche Individuen ihren Ursprung nehmen. Wenn sich schließlich am Keimkerne eine teilweise Separationsteilung vollzieht, so können an dem, ob diploide oder haploide, aber ♂ ♀-wertige somatische Zellkerne führenden neuen Pflanzenindividuum, sowohl ♂- als auch ♀-Geschlechtsorgane, jedoch

auch nur ♂ oder nur ♀ zur Ausbildung gelangen. Dieser Art wären wieder zweierlei, eventuell dreierlei Individuen eigen, die dann dioecische oder trioecische Pflanzenarten sein können.

Das äußerst verschiedenartige Auftreten, die Trennung und Verteilung der Geschlechtsorgane im Pflanzenreiche, insbesondere bei den höheren Pflanzengruppen ist einzig und allein als die Folge der verschiedenartigen Reduktionsteilung der Zellkerne in jenen Zellen anzusehen, welche man allgemein als Mutterzellen der Sporen, auch als Gonotokonten (Nachkommenbildner) d. i. Bildner der Gonen oder Fortpflanzungszellen bezeichnet.

Bei den niedrigsten Pflanzenformen ist diese Mutterzelle oder Gonotokont die Keimzelle selbst, welche hier vielfach auch schon als Spore (Zygospore, Gametospore, Oospore) angesehen und beschrieben wird. Bei höheren Pflanzenformen werden diese Sporenmutterzellen (Gonotokonten) in oder auf Fruchtkörpern gebildet, die sich in verschiedener Art und Weise unmittelbar aus der durch Amphimixis entstandenen Keimzelle entwickeln. Beide Fälle sind für die *Thallophyten (Fungi, Lichenes, Algae)* charakteristisch. Letzterer gilt aber in vollem Maße auch für die *Bryophyten (Hepaticae, Musci frondosi).* Bei den noch höher und höchst organisierten Pflanzenformen endlich bilden sich diese Sporenmutterzellen in besonderen Organen, den sogenannten Sporangien, welche stets auf mehr weniger modifizierten Blattgebilden, den Fruchtblättern (Sporophylla) des vollkommen ausgebildeten, höchstorganisierten Pflanzenkörpers zur Entwickelung gelangen. Dieser Fall charakterisiert sowohl die *Pteridophyten (Filicineae, Equisetineae, Hydropteridineae, Lycopodineae)* als auch die *Spermatophyten (Gymnospermae, Angiospermae).* Bei ersteren Pflanzenreihen gehen aus der Keimzelle oder Urzelle der Pflanze unmittelbar oder doch auf kürzestem Wege Sporen hervor und erst aus diesen entstehen die Pflanzenkörper, deren Entwickelung schließlich in der Bildung der Geschlechtsorgane ihren Gipfelpunkt erreicht. Bei letzteren Pflanzenreihen hingegen sind die Sporen erst spätere, sozusagen die spätesten Produkte des ausgebildeten Pflanzenkörpers, der sich direkt aus der Keimzelle entwickelt und in seinem ersten

Entwickelungsstadium als Embryo bezeichnet wird, während die Geschlechtsorgane ihren direkten Ursprung auf dem meist kürzesten Wege aus den Sporen nehmen. Allem diesem entsprechend lassen sich im ganzen Pflanzenreiche nur zwei große, ausserordentlich scharf begrenzte natürliche Pflanzengruppen unterscheiden. In die erste gehören die noch wenig oder doch ärmlich organisierten *Thallophyten*, wie auch die *Bryophyten*. Ich fasse diese beiden Pflanzenreihen unter dem sonst in Systemen in anderem Sinne gebräuchlichen Namen «*Sporophyten (Sporophyta)*» zusammen, da dieser Name eigentlich nur hier bei diesen zwei Pflanzenreihen das wesentlichste bezeichnet, was den hierher gehörigen Pflanzen eigen ist und sie am meisten charakterisiert. In die andere große Pflanzengruppe hingegen fasse ich die *Pteridophyten* und *Spermatophyten* unter den ebenfalls stark gebräuchlichen Namen «*Embryophyten (Embryophyta)*» zusammen, da diese Benennung alle hierher gehörigen Pflanzen am besten kennzeichnet, ja diesen allein zukommt und nicht auch auf die *Bryophyten* ausgedehnt werden darf, was fast alle modernen Systematiker irrtümlicher Weise tun, denn das, was diese bei den Moosen als Embryo ansehen, ist lediglich nur die Anlage eines Fruchtkörpers und keines selbstständigen Pflanzenkörpers. Auch die Bezeichnungen «Sporophyt» und «Gametophyt» erachte ich nur als solche Benennungen, die zur Deutung der bisher üblichen Auffassung dienen und in dem jetzt allgemein für natürlich gehaltenen Pflanzensysteme recht gut Verwendung finden, aber beide sind in der Nomenklatur nicht nur entbehrlich und überflüssig, und wären der im Grunde nicht entsprechenden Bedeutung halber entschieden nicht zu gebrauchen. Bei den *Sporophyten* zeigt der aus den Sporen oder aus den die Sporen vertretenden Vermehrungszellen direkt oder sukzessive hervorgehende, höchstentwickelte, höchstorganisierte vegetative Pflanzenkörper stets einen haploiden Bau, d. h. sämtliche Zellen desselben führen einen oder auch mehrere haploide Kerne; bei den *Embryophyten* hingegen ist derselbe immer von diploider Konstruktion, d. h. sämtlichen Zellen des ausgebildeten vegetativen Pflanzenkörpers ist ein diploider Zellkern eigen. Aus dieser Ursache ist die schon ein-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

geführte Benennung der *Sporophyten* mit dem Namen *Haploideae (Haploidales)* und die der *Embryophyten* mit dem Namen *Diploideae (Diploidales)* ebenfalls am Platze.

Bei den niedrigsten Vertretern der zygosporen, gameto- und oosporen *Thallophyten* fällt die Separationsteilung zumeist mit der Reduktionsteilung zusammen, und zwar vollzieht sich dieser Doppelvorgang schon am Zygotenkerne oder findet derselbe erst in dem Erstlingsindividuum, welches den Zygotenkern geerbt, statt. Bei höher organisierten Formen ist die Separationsteilung oft schon in ein späteres Entwickelungsstadium verschoben. Zumeist geht sie unmittelbar der Entwickelung der Geschlechtsorgane, niemals aber der, der Geschlechtselemente voran, kann aber auch noch früher erfolgen; in beiden Fällen fällt sie mit einer Äquationsteilung zusammen. Bei den carposporen *Thallophyten* und *Bryophyten* erfährt der Zygotenkern eine typische Teilung; die Reduktionsteilung erfolgt erst in einem späteren Entwickelungsstadium und fällt entweder wieder mit der Separationsteilung zusammen, oder aber die Separationsteilung setzt noch später in Verbindung mit einer Äquationsteilung ein und hat dann die Entwickelung der Geschlechtsorgane im Gefolge.

Bei den Gefäßkryptogamen und allen Samenpflanzen vollzieht sich am Zygotenkerne immer eine Äquationsteilung, bei ersteren zumeist ohne, bei letzteren in vielen Fällen auch mit Separation. Wenn bei den *Pteridophyten* die Äquationsteilung des Zygotenkernes ohne Separation stattfindet, so fällt die Separationsteilung entweder nur mit der viel später erfolgenden Reduktionsteilung zusammen, oder vollzieht sich noch später im Vereine mit einer Äquationsteilung und leitet die Entwickelung der Geschlechtsorgane ein. Bei den *Spermatophyten* erfolgt in allen Fällen, in denen sich die Äquationsteilung des Keimkernes ohne Separation vollzieht, die Entwickelung der Geschlechtsorgane erst nach der Äquationsteilung mit vollständiger Separation, wobei die Reduktionsteilung unmittelbar nur schon der Bildung der Geschlechtselemente vorangeht. Letzterer Vorgang vollzieht sich auch bei jenen Spermatophyten gleichfalls in dieser Entwickelungsphase, bei welchen der Keim-

kern sich typisch mit vollständiger oder teilweiser Separation teilt.

Im Lebenscyklus aller sich geschlechtlich fortpflanzenden Gewächse, seien dieselben nun niederer oder höherer Stellung, setzt also die Reduktionsteilung ebenso, wie die Separationsteilung nur einmal ein; die beiden Teilungsweisen nehmen entweder mit einander einen gleichzeitigen Verlauf, oder sie vollziehen sich gesondert in den verschiedenen Entwickelungsphasen des Pflanzenkörpers.

In den beiden großen natürlichen Pflanzengruppen gibt es Organismen, die ihr Leben mit der Erreichung ihrer Hauptlebensaufgabe, der Sicherung ihrer Nachkommenschaft beschließen, sowie Organismen, bei denen sich dieser Lebensproceß wiederholt erneuert, ohne daß sie selbst dabei zu Grunde gehen. Erstere sind ein- oder mehrjährige Pflanzen, je nachdem sich ihr Leben auf eine oder mehrere Vegetationsperioden erstreckt, letztere hingegen perennierende Gewächse, deren Fortbestehen und Gedeihen eine lange Reihe von Jahren andauern kann und bei denen sich in jeder Vegetationsperiode sämmtliche Lebensfunktionen, die das Fortbestehen der Art bezwecken, immer wieder erneuern. Sowohl bei den einjährigen und mehrjährigen, als auch den perennierenden Gewächsen bilden alle Lebensprocesse, nämlich die in periodisch gleichen Zeitabschnitten regelmäßig wiederkehrenden und aufeinander folgenden Entwickelungsphasen, von der Keimzelle angefangen bis zur Bildung neuer Keimzellen, immer einen in sich wiederkehrenden geschlossenen Kreislauf oder Cyklus, innerhalb dessen man überall zwei Hauptentwickelungsstadien unterscheiden kann: ein haploides und ein diploides Stadium, aber keinesfalls eine «$2x$-» und eine «x-Generation».

Ein Generationswechsel, d. i. Metagenesis kann nur bei manchen *Thallophyten* beobachtet werden, wo nämlich der Entwickelungsgang ein derartiger ist, daß innerhalb desselben zwei (oder mehr) Generationen, zwei (oder mehr) auf ungeschlechtlichem Wege sich vermehrende Generationen und eine auf geschlechtlichem Wege sich fortpflanzende Generation regelmäßig aufeinander folgen und sich einander gleichsam ablösen. Hier allein

gibt es also metagenetische und ametagenetische Arten, aber auch bei diesen metagenetischen Arten sind es nicht $2x$- und x-Generationen, sondern nur haploide, also x-Generationen. Was für eine $2x$-Generation angesehen wird, ist auch hier, wie überall nur ein $2x$-Entwickelungsstadium des ganzen Entwickelungscyklus, aber keine besondere Nachkommenschaft.

Biologische Untergruppen der *Tallophyten* sind die *Zygosporae, Gametosporae, Oosporae* und *Carposporae*. Die ersteren drei erhalten ihre Benennung nach der Bezeichnung der infolge Amphimixis entstandenen Ruhezelle oder Zygote, letztere nach dem Namen der Vermehrungszellen oder Carposporen, als den Produkten eines Fruchtkörpers, welcher aus der den Zygotenkern führenden, keiner Ruhepause unterworfenen Zelle, dem Archicarpium oder Procarpium hervorgegangen ist. In Anbetracht des amphimiktischen Vorganges, insbesondere aber die Entwickelung und morphologische Beschaffenheit der Geschlechtselemente und die Mannigfaltigkeit der sie erzeugenden Geschlechtsorgane vor Augen haltend, lassen sich sämtliche *Thallophyten* viel zweckmäßiger in 10 Reihen unterbringen und diese ebenfalls rein biologische Einteilung, deren nähere Erläuterung schon über den Rahmen dieser kurzen Zusammenfassung hinausgeht, gewährt in dieser außerordentlich reichhaltigen, mannigfaltigen und schwierigen Pflanzengruppe nicht nur eine leichte Orientierung und einen klaren Überblick, sondern berechtigt unter Zuziehung entsprechender Beispiele (in der Originalarbeit werden derer über 100 angeführt) auch am meisten zur Aufstellung der Zellkern-Separationsteilungstheorie, mit welcher sich so manche scheinbar sonderliche und auffallend merkwürdige Einrichtungen richtig beleuchten und erklären lassen.

Bei den *Bryophyten* werden, abgesehen von einigen Arten, bei welchen verschieden große Sporen beobachtet wurden, im Allgemeinen nur einerlei Sporen beschrieben. In Wirklichkeit gibt es aber hier laut der Separationsteilungstheorie zweierlei Sporen, nämlich Isosporen und Homosporen, ja es sind sogar einige Moosarten bekannt, welche wie es scheint Anisosporen reifen. Die Isosporen sind den monoecischen Arten eigen (z. B.

Amblystegium, *Barbula* etc.), die Homosporen aber für die dioecischen Arten charakteristisch (z. B. *Polytrichum*).

Bei den *Pteridophyten* sind isospore, anisospore, homospore und heterospore Genera bekannt; es gibt hier also viererlei und nicht nur zweierlei Sporen, wie es gelehrt wird. Die Isosporen entstehen infolge Reduktionsteilung ohne Separation der Archesporzellkerne und sind für die typisch monoecischen *Filicineae* charakteristisch (z. B. *Hymenophyllaceae*, *Cyatheaceae* etc.). Die Anisosporen kommen infolge bei teilweiser Separation verlaufender Reduktionsteilung der Archesporzellkerne zur Entwickelung und führen gleichfalls zur Monoecie, zumeist aber in dem einen Entwickelungsstadium zur Dioecie (z. B. unter den *Polypodiaeceen* viele *Athyrium*-Arten und die *Osmundaceae*). Die Homosporen entwickeln sich infolge Reduktionsteilung mit vollständiger Chromosomenseparation der Archesporzellkerne, sie sind gleichfalls das Produkt nur monoecischer Pflanzen, scheinen aber insofern Dioecie im Gefolge zu haben, insofern wirkliche Dioecie das eine Entwickelungsstadium charakterisiert; dies gilt aber nur für die homosporen *Pteridophyten* (z. B. *Parkeriaceae*, *Equisetaceae*). Die homosporen Moose sind, wie schon erwähnt wurde, eben der Homosporie zufolge rein dioecische Pflanzen. Die Heterosporen, als Mikro- und Makrosporen endlich entstehen von den übrigen Sporenarten abweichend in verschiedenen Sporangien (Mikro- u. Makrosporangien) infolge einfacher Reduktionsteilung der Archesporzellkerne und können sowohl Produkte monoecischer, als auch dioecischer Pflanzen sein. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Separationsteilung hier schon der Reduktionsteilung vorangeht, vielleicht schon die Bildung der Heterosporangien oder gar die der Sporophylla einleitet, möglicherweise aber auch hier noch mit ihr zusammenfällt. Die Iso-, Aniso- und Homosporen reifenden Sporangien entwickeln sich auf einerlei Fruchtblättern, die Mikro- und Makrosporangien aber kommen zumeist auf verschiedenen Sporophyllen zur Entwickelung (z. B. *Isoëtaceae*, *Selaginellaceae*). Seltener entstehen sie auf ein und demselben Sporophyllum, in welchem Falle dann das Sporophyllum sich zu einer gemeinschaftlichen Hülle umbildet, welche beiderlei Sporangien in sich schließt und mit

diesen zusammen das sogenannte Sporocarpium bildet (z. B. *Marsiliaceae*), obwohl es auch solche Sporocarpien gibt, die entweder nur Mikro- oder nur Makrosporangien in sich schließen (z. B. *Salviniaceae*).

Die *Spermatophyten* sind alle heterospor. Mikro- und Makrosporangien entwickeln sich überall auf verschiedenen Sporophyllen. Sehr wahrscheinlich ist es, daß wenn sich am Keimkerne noch keine Separationsteilung vollzogen hat, diese der Bildung der Sporophyllen vorangeht und die Entwickelung derselben einleitet. Für unwahrscheinlich erachte ich es aber, daß die Separationsteilung erst mit der Reduktionsteilung bei der Sporenbildung (Pollen-, Embryosackbildung) zusammenfiele. Die grosse Mannigfaltigkeit im Auftreten und in der Verteilung der Geschlechtsorgane, der Sporophyllen, welche insbesondere die Spermatophyten, diese große und bestbekannte Pflanzengruppe charakterisiert, findet in jedem Falle ebenfalls in der Separationsteilung ihre Erklärung.

Parthenogenesis wie Apogamie ist überall, bei den niedrigen, wie bei den höchstorganisierten Pflanzen Folge des Ausfalles der Reduktionsteilung. Überdies charakterisiert ein Ausfall der Separationsteilung sowohl die ererbte Parthenogenesis, als auch die vererbte Apogamie. Neben Ausfall der Reduktionsteilung kann wahrscheinlich auch eine partielle Separationsteilung zu apogamer Embryobildung führen. Reduktionsteilung und Separationsteilung haben überall den normalen Befruchtungsvorgang im Gefolge.

Für die Hybridisation ist die partielle Separationsteilung charakteristisch. Auf Grund derselben kann auch überall die MENDEL'sche Regel, die in der bekannten Formel «$A + Aa + a$» ihren Ausdruck findet, auf rein theoretischem Wege genau abgeleitet werden; ja in mancher Hinsicht findet dieselbe gerade auf diesem Wege eine noch deutlichere und vollkommenere Erklärung und Präzisierung. Auch die Möglichkeit des Zustandekommens von Form- und Arthybriden läßt sich auf diesem Wege leicht nachweisen, jenen Fällen gegenüber, in denen eine Kreuzung vollkommen ausgeschlossen erscheint.

Bei monoecischen und zwitterblütigen Pflanzen vereinigen

alle Abkömmlinge, die aus der zufolge Fremdbestäubung (Xenogamie) sich vollziehenden Kreuzung als I. Generation entstanden, sämtliche Eigenschaften und Merkmale der beiden verschieden geschlechtlichen Eltern in sich. Eigentlich gibt es aber unter ihnen nur 50% Abkömmlinge, die hinsichtlich des chromosomischen Zellkernbaues als vollkommen reine und 50% solche, die als nicht vollkommen reine Abkömmlinge betrachtet werden können. Von diesen beiderlei Hybriden der durch Xenogamie untereinander sich vollziehender Kreuzung abstammenden Abkömmlinge II. Generation gibt es wieder 50% Mischlinge, von welchen 25% dem Großvater, 25% der Großmutter gleichen, jedoch eventuell abermals auch neue Formen sein können, die den Großeltern als sehr ähnliche Formen nur nahe stehen. Die übrigen 50% der Abkömmlinge zweiten Grades erben in jedem Falle wieder sämtliche Merkmale der sich kreuzenden Eltern. Die auf gleiche Weise von letzteren wieder durch Kreuzung untereinander hervorgehende III. Generation bilden in demselben Verhältnisse abermals sich weiter spaltende Abkömmlinge.

Bei dioecischen Pflanzen gleicht die Hälfte der Abkömmlinge in der II. Generation den Eltern, die andere Hälfte aber ebenfalls den Großeltern. Jedoch können letztere Abkömmlinge auch in mehr-minderem Maße den Großeltern nahekommende neue Mischlinge sein, je nachdem die Separationsteilung bei einem der Eltern auf diese oder jene Weise sich vollzogen hat, oder aber die Kreuzung zwischen solchen Abkömmlingen stattfand, bei welchen eine teilweise Separationsteilung sich vollzog, diese aber bei den beiden Eltern eine verschiedenartige gewesen ist.

Während es bei der Kreuzung von Formen unumgänglich notwendig erscheint, daß bei beiden Eltern der I. Generation eine teilweise Separationsteilung der Bildung der Geschlechtsorgane vorangehe, findet bei der Kreuzung von Arten die teilweise Separationsteilung nur bei einem der beiden Eltern statt, beim andern der Eltern hingegen geht der Bildung der Sexualorgane eine vollkommene Separationsteilung voran.

Es scheint, daß nur zwischen solchen verschiedenen Arten eine Hybridisation möglich ist, bei welchen die Zahl der Chro-

mosomen vollkommen übereinstimmt; nichtsdestoweniger würden aber doch auch einige wenige Hybriden bekannt, die aus Kreuzungen dieser Art hervorgegangen sind.

*

Die weit ausführlichen Auseinandersetzungen der umfangreichen Originalarbeit, die im Principe dem auch in OLTMANNS «Morphologie u. Biologie der Algen» zum Ausdruck kommenden Satze folgt: «Man soll vor Hypothesen nicht zurückschrecken, wenn sie geeignet sind eine Übersicht über ein Chaos von Tatsachen zu schaffen,» werfen eine ganze Reihe von Fragen auf, deren bestimmte Lösung nur dann zu erwarten sein wird, wenn uns ein solches Reagens zur Verfügung stünde, mit welchem man die Substanz der männlichen und weiblichen Chromosomen gesondert unter allen Umständen genau und mit voller Sicherheit bestimmen könnte. Bis dahin lassen sich in dieser Richtung auf dem betretenen Gebiete nur mittelst Folgerungen Schlüße ziehen. Und wenn auch in vielen Fällen die Ergebnisse der entwickelungsgeschichtlichen Vorgänge als allgemein bekannte Tatsachen die Richtigkeit solcher rein teoretischen Folgerungen bestätigen, so ist zukünftig die endgültige Lösung dieser Aufgabe doch nur von der Mikrochemie zu erwarten.

14.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER STERNENTWICKELUNG.[1]

Von Baron BÉLA HARKÁNYI.

Vorgelegt der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung am 22. Mai 1922.

1. Die großen Fortschritte in der Erklärung der Konstitution und Entwickelung der Fixsterne, die wir hauptsächlich den Forschungen von E. HERTZSPRUNG und H. N. RUSSEL verdanken, führten Herrn W. NERNST in einer vor kurzem erschienenen Arbeit[2] zu einer sehr interressanten, neuen Theorie der Sternentwickelung. Ausgehend aus der Tatsache, daß die bei der Kondensation entwickelte Energie als Ersatz der ausgestrahlten Energie für genügend lange Zeiträume nicht ausreicht, nimmt Herr NERNST an, daß die Quelle der ausgestrahlten Energie in radioaktiven Prozessen zu suchen ist. Seiner Ansicht nach würde der radioaktive Zerfall des Urans zur Erklärung dieser Prozesse völlig ausreichen.

Es sei nach NERNST die in einem Jahre ausgestrahlte Energie des Himmelkörpers U, sein Radius r, seine effektive Temperatur T, die Konstante des STEFAN-BOLTZMANN'schen Gesetzes $\varkappa$, so ist:

$$U = 4\pi\varkappa r^2 T^4;$$

ist dann δ die Dichtigkeit des Körpers bezogen auf Wasser und μ seine Masse, so folgt:

$$\delta = \frac{3}{4}\frac{\mu}{\pi r^3}.$$

---

[1] Ungarisch erschienen unter dem Titel: «Adalékok a csillagok fejlődésének elméletéhez.» Mathematikai és Természettudományi Értesítő (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ung. Akademie der Wiss.). Bd. XXXIX. (Budapest, 1922), pp. 30—47.

[2] Das Weltgebäude im Lichte der neueren Forschung (1921).

Werden die analogen Größen für die Sonne mit U_s, T_s, δ_s und μ_s bezeichnet und $\mu = \mu_s = 1$ angenommen, so folgt:

$$U = U_s \left(\frac{T}{T_s}\right)^4 \left(\frac{\delta_s}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad 1)$$

Aus 1) läßt sich U berechnen, wenn für T und δ passende Annahmen gemacht werden. NERNST setzt für die Sonne:

$$U_s = 1{\cdot}20 \times 10^{41} \text{ Erg.}, \quad T_s = 6300°, \quad \delta_s = 1{\cdot}38.$$

Entsteht U aus dem radioaktiven Zerfall der wirksamen Substanz, so kann nach NERNST der zeitliche Verlauf des Entwickelungsprozesses für verschiedene Phasen der Sternentwickelung untersucht und mit den Resultaten der Sternstatistik verglichen werden. Wird nämlich nach dieser Annahme.

$$U = U_o e^{-ct} \qquad 2)$$

gesetzt, so läßt sich die Zeit t bei Kenntnis der Konstanten c und U_o (Anfangswert der Energie) berechnen. In den folgenden Zeilen möchte ich die kurzgefaßten, nur in den Hauptzügen durchgeführten Betrachtungen des Herrn NERNST ergänzen und mit den Beobachtungsergebnissen vergleichen.

Die Zahlen, welche Herr NERNST seinen Betrachtungen zugrunde legt, sind nach geringfügigen, auf Neuberechnung beruhenden Verbesserungen in der 1., 2. und 4. Spalte der folgenden Tabelle I. zusammengestellt; die Einheit von U ist 10^{41} Erg.

Tabelle I.

δ	T	τ	U	t	M
0·001	5000°	2·92	59·0	0·035	+0·71
0·035	8000	1·83	36·1	0·248	1·17
0·23	9500	1·54	20·5	0·495	1·97
0·33	9500	1·54	16·1	1·599	2·24
0·65	8500	1·72	6·57	0·989	3·08
1·00	7500	1·95	2·99	1·331	3·83
1·38	6300	2·32	1·20	1·727	4·78
1·50	6000	2·43	0·93	1·836	5·06
2·00	4000	3·65	0·15	2·624	7·62

2. Um diese Daten mit anderweitigen photometrischen Angaben vergleichen zu können, habe ich eine in einer früheren Abhandlung[3] mitgeteilte Formel:

$$m = a + \frac{b}{T} - 5 \log \sin \varrho,$$

benützt, woraus sich auch die absolute Sterngröße M leicht ableiten läßt, wenn die scheinbare Größe m, die effektive Temperatur T und der in Winkelmaß ausgedrückte (scheinbare) Radius ϱ bekannt sind. Werden hier der lineare Radius r und die Parallaxe p eingeführt, so folgt:

$$m = a + \frac{b}{T} + 5 \log r - 5 \log \sin p.$$

Die absolute Größe eingeführt und die auf die Sonne bezüglichen Größen mit dem Index S bezeichnet, folgt:

$$M - M_s = \frac{b}{T} - \frac{b}{T_s} - 5 \log \frac{r}{r_s}.$$

Da ferner für $\mu = \mu_s = 1$ die Gleichung:

$$\left(\frac{r}{r_s}\right)^3 = \frac{\delta_s}{\delta}$$

besteht, so wird endlich:

$$M = M_s + \frac{b}{T} - \frac{b}{T_s} + \frac{5}{3} \log \frac{\delta}{\delta_s}.$$

Hier der Kürze halber $\delta : \delta_s = \sigma$ gesetzt und die häufig statt T benützte Größe:

$$\tau = \frac{c_2}{T}, \quad c_2 = 14600,$$

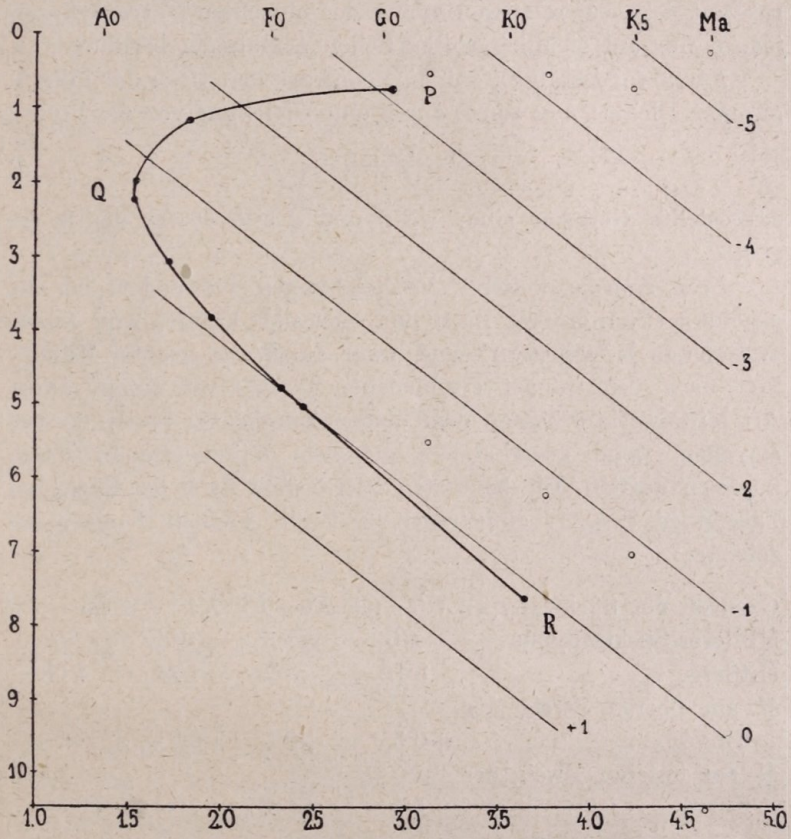
eingeführt, deren Werte ich kürzlich aus den WILSING'schen Messungen für die einzelnen Spektraltypen abgeleitet habe,[4]

---

[3] Astron. Nachrichten, Bd. 186, No 4451 (1910) p. 169 Formel 17.
[4] Astron. Nachrichten Bd. 217 No 5202. (1922.)

ferner nach der citierten Arbeit[3] $b = 28240$, und $M_s = 4{\cdot}78$ endlich nach NERNST $T_s = 6300°$ gesetzt wird:

$$M = 0{\cdot}298 + \frac{5}{3}\log\sigma + \frac{28240}{T} = 0{\cdot}298 + \frac{5}{3}\log\sigma + 1{\cdot}934\,\tau. \quad 3)$$



Figur 1.

Nach diesen Formeln sind die Werte von τ und M in der Tabelle I. berechnet, in der Figur 1. τ als Abscisse M als Ordinate eingetragen und die so bestimmten Punkte durch schwarze Punkte bezeichnet. Die in der Figur oben bezeichneten Abscissen deuten die Mittelwerte von τ für die entsprechenden Spektral-

typen an, die ich der Kurve C_0 der citierten Arbeit[4] entnommen habe — bis auf den Wert für $A0$, der WILSING's[5] Berechnung entspricht. Die Benützung von τ statt des Spektraltypus — wie es oft geschieht — betrachte ich als zweckmäßiger, weil τ als physikalisch gut definierte Größe ziemlich genau bekannt ist, der relative Umfang der einzelnen Harvard-Typen jedoch nur auf ziemlich willkürlichen Annahmen beruht.

Aus 3) folgt einfach, daß die geometrischen Örter der Punkte gleicher Dichte: $\sigma = \text{const.}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$M = p + q\tau \qquad 4)$$

dargestellte Geraden sind, wo p und q sich sofort aus 3) ergeben.

Zum Zwecke weiterer Vergleichungen verwendete ich die absoluten Sterngrößen nach dem neuesten Katalog von ADAMS und seinen Mitarbeitern[6] und zwar die Werte größter Häufigkeit nach dem jüngst erschienenen Bericht von HALE.[7] Diese Art Mittelwerte scheinen dem obigen Zwecke am besten zu entsprechen, wenn auch anders gebildete Mittelwerte in Frage kommen dürften. Die benützten Werte sind nach der folgenden Tabelle in Fig. 1. eingetragen und mit kleinen Kreisen bezeichnet:

Grenzen der Spektraltypen	*G0—G5*	*K0—K3*	*K4—K9*	*Ma—Md*
Mittlerer Spektraltypus	*G5*	*K1·5*	*K5*	*Ma*
Mittleres τ	3·12	3·76	4·22	4·63
M am oberen Zweig der Kurve	+0·5	+0·5	+0·7	+ 0·2
M am unteren Zweig der Kurve	+5·5	+6·2	+7·0	+10·5

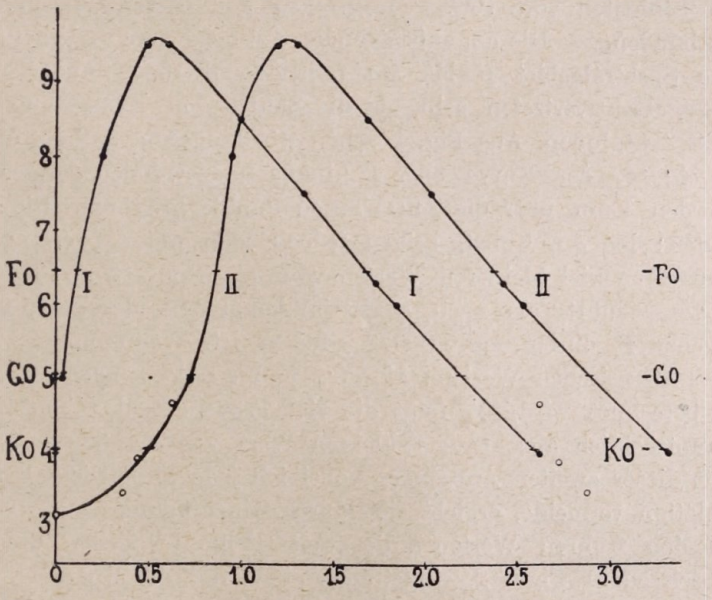
Die mittleren Werte der Spektraltypen habe ich auf Grund der relativen Häufigkeit der einzelnen Unterabteilungen bestimmt,

[5] Publikat. des Astrophys. Obs. zu Potsdam No. 42.

[6] Contributions from the Mt WILSON Solar Observ. No. 199.

[7] Annual Report of the Director of the Mt. WILSON Solar Observ. (1921.) p. 269—70.

die τ sind wieder meiner Abhandlung[4] entnommen. Die Geraden gleicher Dichte nach 4) sind für $\log \sigma = +1, 0, -1, \ldots -5$, mit den entsprechenden Zahlen bezeichnet. Die NERNST'schen Punkte lassen sich durch eine glatte Kurve verbinden, die den Gang der Sternentwickelung andeutet: bei P beginnend (rote und gelbe Riesensterne) über Q, wo sie den Höhepunkt erreicht, bis sie bei R mit den Zwergsternen größter Dichte zu Ende geht.



Figur 2.

3. Zum Schlusse berechnete ich nach NERNST aus 2) die Werte von ct, um den zeitlichen Verlauf der Sternentwickelung verfolgen zu können. Wenn vorausgesetzt wird, daß der Zeitraum, während welcher ein Stern eine gewisse — hier durch den Spektraltypus charakterisierte — Phase seiner Entwickelung durchläuft, der Häufigkeit der Phase proportional ist, so können diese Zahlen mit den relativen Häufigkeiten der einzelnen Typen verglichen werden. In 2) gewöhnliche Logarithmen eingeführt, wird:

$$\log U_0 - \log U = at \qquad 5)$$

wo a durch die Halbwertszeit des radioaktiven Körpers bestimmt ist. Da diese Konstante hier für das Folgende belanglos ist, habe ich der Kürze halber t statt at geschrieben und die Werte von t für zwei Annahmen über U_0 berechnet. Die erste Annahme war der von NERNST extrapolierte Wert: $U_0 = 64{\cdot}0$, die entsprechenden t sind in der 6. Spalte der Tabelle 1. enthalten, in Figur 2. als Abscissen mit den Temperaturen als Ordinaten in Einheiten von 1000° eingetragen und durch die Kurve I. verbunden. — Die am aufsteigenden Ast der Kurve I. liegenden, ins Spektralgebiet K bis Ma fallenden Sterne können nicht sehr stark vertreten sein, da die Zahlen von NERNST nur bei 5000° beginnen. Aus Fig. 1. sehen wir hingegen, daß der obere Zweig PQ der Kurve über P hinaus ungezwungen fortgesetzt werden kann über die ADAMS'schen Punkte hindurch. Die Geraden: $\log \sigma =$ Konst. zeigen jedoch, daß die so verlängerte Kurve zu viel kleineren Werten von σ — von etwa 10^{-4} bis 10^{-5} — führt, als nach NERNST's Annahmen, dessen unterer Grenzwert durch $\sigma = 0{\cdot}00072$ gegeben ist. Wenn nun U_0 aus den ADAMS'schen Werten: $M = 0{\cdot}2$ und $\tau = 4{\cdot}63$ nach 1) und 3) berechnet wird, so folgt die viel größere Zahl $U_0 = 318{\cdot}1$, hauptsächlich wegen dem kleinen Wert von $\sigma = 3{\cdot}66 \times 10^{-6}$. Mit dieser zweiten Annahme, wobei ich jede willkürliche Extrapolation vermeide, ergiebt sich durch Hinzufügung von $+ 0{\cdot}696$ zu den frühren Werten t die zweite Reihe der Zeiten, die als Abscissen in Figur 2. eingetragen sind und die Kurve II. bestimmen; zum Vergleiche sind die ADAMS'schen Punkte als kleine Kreise nach folgenden Daten eingezeichnet:

Spektrum	$G5$	$K1{\cdot}5$	$K5$
t am aufsteigenden Aste	0·607	0·436	0·361
t am absteigenden Aste	2·607	2·716	2·881
T	4760°	3880°	3460°

Die Kurve II. steigt anfangs langsamer als I. und erstreckt sich auf ein größeres Intervall. Die ADAMS'schen Punkte schließen sich dem aufsteigenden Aste sehr gut an, am absteigenden Aste sind jedoch die Abweichungen sehr beträchtlich. Dies war schon nach Figur 1. zu erwarten, wo sich die entsprechenden

Punkte auch nicht gut einfügen lassen und nach dem Verlaufe der Geraden $\log \sigma = \text{Konst.}$ beurteilt, in dem Sinne von der Kurve abweichen, der auf Werte von $\sigma < 1$ schließen läßt, was der Hypothese der Kondensation widersprechen würde. Eine Korrektur von τ wegen M würde im gewünschten Sinne wirken, davon habe ich jedoch abgesehen, weil der von mir kürzlich in [4] abgeleitete Wert des entsprechenden Koeffizienten: —0·120 für ein so großes Intervall der absoluten Größen doch nicht genau genug bestimmt ist. Als Endpunkt der Kurven habe ich nach NERNST die Temperatur: 4000° gewählt und glaube, daß in den zur Vergleichung verwendbaren Katalogen wenig Zwergsterne von niedrigerer Temperatur vorhanden sind.

Um die Prozentzahlen für die einzelnen Spektraltypen berechnen zu können, habe ich die Temperaturgrenzen der einzelnen Typen bei Benützung meiner mehrmals gebrauchten Resultate [4] wie folgt ermittelt: die zu $F0$ gehörige Temperatur: 6460° wähle ich als untere Grenze für die zusammengefaßte Gruppe $A + B$, die zu $G0$ gehörige Temperatur: 5100° als untere Grenze von F, die zu $K0$ gehörige Temperatur 4110° als untere Grenze von G. Der Abschnitt der Kurve, welchen noch niedrigeren Temperaturen entspricht, umfaßt die Zusammengezogene Gruppe $K + M$. — Die Differenzen der t-Werte, zu denen die entsprechenden T-Werte als Ordinaten gehören, sind der Dauer der einzelnen Phasen der Entwickelung proportional. Diese Differenzen mit der Gesammtdauer der Entwickelung kombiniert, ergeben die folgenden relativen Häufigkeiten in Prozenten, wo sich $F'G' \ldots$ auf den aufsteigenden, F'', G'' auf den absteigenden Ast beziehen:

	$K'+M'$	G'	F'	$A+B$	F''	G''	$K''+M''$
Kurve I.	0·7	0·7	3·1	59·2	19·9	15·3	1·2%
Kurve II.	15·4	6·9	3·0	46·0	15·1	12·4	1·2%

Zum Vergleiche mit den Beobachtungen benützte ich die von E. C. PICKERING bestimmten, auch von H. SEELIGER [8] gebrauchten Werte, die bis zur scheinbaren Größe 6·25 mg. rei-

[8] Astron. Nachrichten Bd. 193. No. 4617.

chen, die Zahlen für die 3 galaktischen Zonen gemittelt, ferner die analog von mir berechneten Prozentzahlen aus KAPTEYN's Zusammenstellung,[9] die bis 8·45 mg. vollständig ist. So finde ich folgende Zahlen:

	B	*A*	*F*	*G*	*K*	*M*
Pickering	11·6	30·8	11·8	9·9	28·1	7·5%
Kapteyn	10·6	24·1	20·0	18·1	25·0	2·3%

Die für die beiden Kurven geltenden Prozentzahlen für den aufsteigenden und absteigenden Ast zusammenaddiert, erhalte ich schließlich die folgende Tabelle:

	A+*B*	*F*	*G*	*K*+*M*
Kurve I.	59·2	23·0	16·1	1·9%
Kurve II.	46·0	18·0	19·3	16·6%
Pickering	42·4	11·8	9·9	35·6%
Kapteyn	34·7	20·0	18·1	27·3%

Die Kurve II. giebt im Allgemeinen eine günstigere Verteilung der Typen, als Kurve I., bei welcher die Gruppe $A+B$ viel zu zahlreich herauskommt auf Kosten von $K+M$. Diese Verhältnisse verbessern sich gerade infolge der Wahl von U_o, der den Beobachtungen entnommen ist und nicht auf Extrapolation beruht. Dadurch wird auch der aufsteigende Ast von II. im Vergleich zu I. wesentlich verlängert. — Es entspricht jedoch das Häufigkeitsverhältnis der Riesensterne zu den Zwergsternen in I. besser den allgemein verbreiteten Anschauungen, nach welchen die Anzahl der Riesensterne im Bereich von *F* bis *M* wesentlich kleiner wäre, als die der Zwergsterne, welches Verhältnis jedoch, soweit mir bekannt, noch nirgends zahlenmäßig nachgewiesen ist. In II. ist dieses Verhältnis aus dem ober erwähnten Grunde gerade entgegengesetzt. — Die Unterschiede der Zahlen von PICKERING und KAPTEYN sind übrigens auch recht auffällig, dessen Grund der Unterschied der Grenzhelligkeit der beiden Reihen bildet, wodurch die relative Häufigkeit der *B*-Sterne in hohen Grade, die der *A*-Sterne etwas we-

[9] Publications of the Astron. Laboratory at Groningen No 30, pg. 88. Tabelle 11.

niger beeinflußt wird. Die Discussion nach galaktischen Breiten läßt sich bei diesem Material selbstverständlich nicht durchführen.

Die hier mitgeteilten Untersuchungen betrachte ich bei der Lückenhaftigkeit unserer diesbezüglichen Kenntnisse und infolge der Einführung nicht streng begründeten Hypothesen für einen vorläufigen, orientierenden Versuch in dieser Richtung. Die Annahme der gleichen Masse für alle Sterne, der Zusammenhang der mittleren Temperatur mit der absoluten Sterngröße M, die schärfere Definition der Mittelwerte von M, die zu den einzelnen Spektraltypen gehören, die Ermittelung von U_0 und des zeitlichen Endpunktes der Sternentwickelung bedürfen noch weiterer auf größerem Material beruhender Untersuchungen, die die Aufgabe zukünftiger Forschungen bilden werden.

Die Berechnung der Dauer dieser Prozesse in Jahren aus der Konstante c in 2), die einen wichtigen Teil der NERNST'schen Arbeit bildet, hat auf die obigen Untersuchungen keinen Einfluß.

BIBLIOTHECA ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE
MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA
BUDAPEST

Magyar Tudományos Akadémia
Könyvtára 55146/1951. sz.

366151

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK

MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

EINUNDDREISSIGSTER BAND · 1913
1. HEFT
MIT FÜNF TAFELN

1918

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1916

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

EINUNDDREISSIGSTER BAND. 1913.

INHALT DES 1. HEFTES.

Seite

1. A. Richter, Eine neue Schizaea aus Borneo (Schizaea Hallieri A. Richt.). Mit 5 Tafeln 1

2. J. Farkas, Grundlegung zu einer Kontinuitätstheorie der Elektrizität und des Magnetismus 45

AVIS.

Die Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn werden jährlich in vier Heften herausgegeben. Der Preis eines Jahrganges beträgt 12 Mark. Die Redaktion.

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band 40, 1

Vorlesungen über Zahlen- u. Funktionenlehre

von **Alfred Pringsheim**

Professor der Mathematik an der Universität München

2 Bände.

Erster Band. Erste Abteilung. Reelle Zahlen und Zahlenfolgen

[XII u. 292 S.] gr. 8. 1916. geh. ℳ 12.—, in Leinw. geb. ℳ 13.50.

Das vorliegende, in zwei Bände eingeteilte Werk, das aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen ist, verfolgt das Ziel, den Studierenden der Mathematik, insbesondere schon denjenigen der ersten Semester, eine ausschließlich auf elementaren Methoden beruhende und doch streng und einheitlich aufgebaute und zugleich möglichst vollständige Darstellung der Hauptlehren der Funktionentheorie und ihrer arithmetischen Grundlagen zu bieten.

Eine ausführliche, ohne irgendwelche mathematische Vorkenntnisse verständliche Behandlung dieser Grundlagen bildet den Inhalt des zunächst erscheinenden ersten Bandes. Der zweite Band wird eine Einführung in die Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen und der einfachsten mehrdeutigen Umkehrungsfunktionen auf Grund der Weierstraßschen Methoden und deren weiterer Ausbildung enthalten.

Als Grundgedanken des Ganzen bezeichnet der Verfasser die Absicht, „die elementaren Methoden nach Möglichkeit auszunützen bzw. weit genug zu vervollkommnen, um den Leser mit den modernen Verschärfungen und Vertiefungen der Begriffe vertraut machen zu können und ihn so nahe, als es die Einfachheit der aufgewendeten Hilfsmittel irgend gestattet, an die Grenzen unserer heutigen Erkenntnis heranzuführen.

Der zunächst erscheinenden ersten Abteilung des ersten Bandes werden die beiden anderen unmittelbar folgen, deren letzte auch ein alphabetisches Sachregister enthalten wird.

31:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Die elliptisch. Funktionen u. ihre Anwendungen

Von **R. Fricke**

Professor an der Techn. Hochschule zu Braunschweig

In 3 Teilen. gr. 8. Geh.

I. Teil: Die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen

Mit 83 in den Text gedruckten Fig. [X u. 500 S.] 1916. Geh. ℳ 22.—, in Leinw. geb. ℳ 24.—

Das Werk beabsichtigt, eine abgerundete Gesamtdarstellung der Theorie der elliptischen Funktionen und ihrer Anwendungen zu geben. Die Natur des Gegenstandes bedingt eine Dreiteilung, so daß die Darstellung in drei je für sich stehenden Bänden mäßigen Umfanges dargeboten werden soll. — Der vorliegende erste Band entwickelt nach einer Einleitung, die die erforderlichen Voraussetzungen aus der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, die Grundlagen der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen behandelt, ihre analytischen Darstellungen in umfassender Weise und beleuchtet den Gesamtumfang der hier in Betracht kommenden Körper zusammengehöriger Funktionen. Der Verfasser hofft die funktionentheoretischen Auffassungen, die er sich als Schüler und langjähriger Mitarbeiter Felix Kleins zu eigen gemacht hat, auch in diesem Gebiete in angemessener Weise zu Geltung gebracht zu haben. — Während die lineare Transformation ein Bestandteil der Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen ist und dieserhalb bereits im ersten Bande ihren Platz zu finden hat, sollen die allgemeine Transformationstheorie und ihre wichtigen Anwendungen im Gebiete der Algebra und Zahlentheorie im zweiten Bande eine erschöpfende Darstellung finden. — In einer selbständigen und für sich abgerundeten Gestalt soll sich endlich der dritte Band anreihen, der die weitverzweigten Anwendungen der elliptischen Funktionen im Gebiete der Geometrie, Mechanik usw. behandeln und die in den beiden ersten Bänden vorgebildeten analytischen Ansätze bis zu wirklicher Brauchbarkeit für die Zwecke numerischer Rechnungen durchbilden soll.

31:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lehrbuch der darstellenden Geometrie

für technische Hochschulen

Von Dr. **Emil Müller**

Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Wien

In 2 Bänden

I. Band. Mit 273 Figuren und 3 Tafeln. [XIV u. 368 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. ℳ 12.—
II. Band. Mit 328 Figuren. [X u. 361 S.] 1916. Geh. ℳ 12.80, in Leinw. geb. ℳ 14.—

Zweiter Band auch in 2 Heften erhältlich:

Erstes Heft. Mit 140 Figuren. 1912. Geh. ℳ 4.40
Zweites Heft. Mit 188 Figuren. 1910. Geh. ℳ 8.40
——— Einbanddecke zu Heft 1 u. 2 ℳ 1.—

Der erste Band behandelt auf Grund der Darstellung durch zugeordnete Normalrisse (Orthogonalprojektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen) die Elementaraufgaben und die Kurven und Flächen (abwickelbare Flächen, Kugelfläche, Dreh- und Schraubenflächen, windschiefe und „graphische" Flächen).

In dem ersten Teil des zweiten Bandes sind die für Bauingenieure so wichtige kotierte Projektion, die Dachausmittlung und die normale Axonometrie behandelt. Insbesondere dürfte in diesem Teil klar das Bestreben hervortreten, den Techniker, vor allem den Bauingenieur, in den ersten Semestern seines Hochschulstudiums mit jenen Darstellungsarten und graphischen Verfahren vertraut zu machen, die er in den praktischen Disziplinen der höheren Semester brauchen wird. Schon der Umstand, **daß die kotierte Projektion bisher wohl in keinem Buch in solch enger Anlehnung an die Praxis dargelegt worden ist,** dürfte auch manchen in der Praxis stehenden Ingenieur zum Ankauf verlocken.

Der zweite Teil behandelt die schiefe Axonometrie, die schiefe Projektion und die Perspektive. Die allgemeine schiefaxonometrische Darstellung auf Grund des Pohlkeschen Satzes hat hier eine eingehendere theoretische und praktische Behandlung erfahren als bisher in irgendeinem anderen Werk. Insbesondere sind auch Lösungen einfacher Konstruktionsaufgaben gegeben, die bei der freihändigen Anfertigung geometrisch richtiger Skizzen Verwendung finden können.

81:

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Repertorium der Physik

von **Rudolf H. Weber** und **Richard Gans**

Professor in Rostock — Professor in La Plata

In zwei Bänden. Erster Band: **Mechanik und Wärme**

Unter Mitarbeit von F. A. Schulze-Marburg (Akustik)
und P. Hertz-Göttingen (Statistische Mechanik)

Erster Teil:

Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik und Akustik

[XII u. 434 S.] Mit 126 Figuren im Text.
8. 1915. Geh. ℳ 8.—

Zweiter Teil:

Kapillarität, Wärme, Wärmeleitung, kinetische Gastheorie und statistische Mechanik

[XIV u. 613 S.] Mit 72 Figuren im Text.
8. 1916. Geh. ℳ 12.—

Zwischen den Lehrbüchern, welche nur die Elemente der theoretischen Physik bringen, und den Spezialwerken von großem Umfang sowie den bekannten Handbüchern soll das Repertorium eine Mittelstellung einnehmen. Es soll mehr bringen als die elementaren Lehrbücher, indem es neuere Untersuchungen teils behandelt, teils wenigstens erwähnt und damit gewissermaßen das Studium der Einzelwerke über besondere Gebiete der Physik vorbereitet und das Auffinden und das Verständnis der Originalarbeiten erleichtert. So möchte das Buch eine Vademekum sein für jeden, der selbständig zu arbeiten beginnt. Der II. Band, dem die Lehre vom Magnetismus, der Elektrizität und der Optik vorbehalten bleibt, soll dem ersten in Bälde folgen.

83: 482

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

300151

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

EINUNDDREISSIGSTER BAND · 1913–1918
2./4. HEFT
MIT SECHS FIGUREN UND VIERZEHN TAFELN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG UND BERLIN
1920

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & K^IE.]

MTA AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

EINUNDDREISSIGSTER BAND. 1918.

INHALT DES 2./4. HEFTES.

Seite

3. A. Richter, Über einige neue Glieder der Marcgraviaceen, auf Basis der Phylogenie und der vergleichenden Anatomie. Mit Tafel I—XIV 65

4. A. Schuller, Konstantes Wasserniveau zur Verminderung des Wasserleitungsdruckes. Mit 1 Figur 147

5. A. Schuller, Über Fallmaschinenversuche. Mit 1 Figur. . 149

6. A. Schuller, Zur Ergänzung der Stevartschen schiefen Ebene. Mit 1 Figur 155

7. A. Schuller, Apparat zur Demonstration der geradlinigen Resultante entgegengesetzter Kreisschwingungen und der Drehung der Schwingungsrichtung. Mit 2 Figuren 158

8. A. Schuller, Einfacher Quecksilberunterbrecher für ein Pendel mit elektromagnetischem Betriebe. Mit 1 Figur 162

Bandtitel und Inhalt.

AVIS.

Die Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn werden bis auf weiteres nicht fortgesetzt. Die Redaktion.

Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre

von Geh. Hofrat Dr. Alfred Pringsheim

Professor der Mathematik an der Universität München

Erster Band: Zahlenlehre

Erste Abteilung. Reelle Zahlen und Zahlenfolgen

[XII u. 292 S.] gr. 8. 1916. Geheftet ℳ 12.—, gebunden ℳ 13.40

Zweite Abteilung. Unendliche Reihen mit reellen Gliedern

[VIII u. S. 293—514.] gr. 8. 1916. Geheftet ℳ 10.80, gebunden ℳ 12.40

Hierzu Teuerungszuschläge d. Verlags (Juli 1920 100%, Abänderung vorbeh.) u. d. Buchhandl.

Als Grundgedanken des Ganzen bezeichnet der Verfasser die Absicht, „die elementaren Methoden nach Möglichkeit auszunützen bzw. weit genug zu vervollkommnen, um den Leser mit den modernen Verschärfungen und Vertiefungen der Begriffe vertraut machen zu können und ihn so nahe, als es die Einfachheit der aufgewendeten Hilfsmittel irgend gestattet, an die Grenzen unserer heutigen Erkenntnis heranzuführen“ Zum Verständnis des ersten Bandes sind überhaupt keinerlei mathematische Vorkenntnisse erforderlich.

Die erste Abteilung umfaßt die reellen Zahlen und Zahlenfolgen, also die Lehre von den rationalen Zahlen von den begrenzten und unbegrenzten Systembrüchen, die konvergenten Zahlenfolgen, die Lehre von den Potenzen und vom Grenzwertbegriff; ein Schlußkapitel behandelt die zweifach unendlichen Zahlenfolgen.

Die zweite Abteilung bringt die ausführliche Theorie der unendlichen Reihen mit reellen Gliedern. Beginnend mit den Eigenschaften der Reihen mit positiven Gliedern wird auf dem bekannten Prinzip der Reihenvergleichung eine allgemeine Theorie der Konvergenz- und Divergenzkriterien aufgebaut, welche nicht nur die in der Praxis üblichen Kriterien als spezielle Fälle liefert, sondern den inneren Zusammenhang aller möglichen Kriterienbildungen sowie die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit feststellt und dazu dient, die Einsicht in prinzipielle, das Wesen der Reihenkonvergenz betreffende Fragen nach Möglichkeit zu vertiefen. Die Betrachtung der Reihen mit positiven und negativen Gliedern führt zu den Begriffen der absoluten und nichtabsoluten bzw. unbedingten und bedingten Konvergenz zur Herleitung der auf die letztere bezüglichen Krtierien und zur genaueren Untersuchung der etwaigen Wertveränderungen bei Umstellung der Glieder. Eine eingehende Behandlung der Lehre von den Doppelreihen bildet den Schluß dieser Abteilung.

31:528

Vorlesungen über reelle Funktionen

Von Prof. Dr. C. Carathéodory

Mit 47 Figuren im Text. [X u. 704 S.] gr. 8

1918. Geheftet ℳ 28.—, gebunden ℳ 30.—

Hierzu Teuerungszuschläge: Juli 1920 100%, Abänderung vorbehalten

Die Umwälzung, welche durch die Untersuchungen von H. Lebesgue in der Theorie der reellen Funktionen hervorgerufen worden ist, ist ein Prozeß, der heute in seinen Hauptzügen als abgeschlossen gelten kann. Die Vorzüge der neuen Methoden können aber nur durch einen Aufbau, der von Grund aus vorgenommen wird, in ihrer ganzen Tragweite zur Geltung kommen. Eine derartige, möglichst elementare, systematische Darstellung hat der Verf. versucht, um den Studenten in mittleren Semestern und den angehenden Forschern viele Umwege zu ersparen. Das Buch ist auf Grund einer im Sommersemester 1914 in Göttingen gehaltenen Vorlesung geschrieben; es enthält die Theorie der Punktmengen, soweit diese für das Folgende erforderlich ist, die allgemeine Theorie der Funktionen von n Veränderlichen, die Theorie der bestimmten und unbestimmten (Lebesgueschen) Integrale, sowie auch ihre Spezialisierung auf die Riemannsche Integration. Darüber hinausgehend werden die Funktionen einer und zweier Veränderlicher eingehend untersucht. Existenzbeweise für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen schließen das Buch, welches ganz auf sich selbst ruht und überhaupt keine Vorkenntnisse, sondern nur eine gewisse Reife des Urteils voraussetzt.

31:804

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Einführende Werke in die Relativitätslehre

Raum, Zeit und Relativitätstheorie. Gemeinverständliche Vorträge von Prof. Dr. L. Schlesinger. Mit 2 Tafeln und 5 Figuren. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Heft 5.) Geh. ca. . . . . M. 2.80

Die Abhandlung, aus einem Vortrag hervorgegangen, der sich an Gebildete aller Stände wendet, behandelt die allgemeine und spezielle Relativitätstheorie. Sie setzt nur ein Mindestmaß an mathematischen Kenntnissen voraus und bedient sich vorwiegend graphischer Methoden.

Physikalisches über Raum und Zeit. Von Prof. Dr. E. Cohn. 4. Auflage. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Heft 2.) Geh. . . . . M. 1.60

„In anschaulicher Darstellung legt der Verfasser die physikalischen Erfahrungen dar, die zum Verständnis des Verlaufs der Naturvorgänge im Raum-Zeitsystem führen und in denen die Relativitätstheorie wurzelt. Das Hauptgewicht ist auf eine das volle Verständnis vom Standpunkte des physikalischen Denkens erschließende Darstellung gelegt, und die mathematische Formulierung ist nur im Anhang berührt." (Astronom. Nachrichten.)

Einführung in die Relativitätstheorie. Von Dr. Werner Bloch. 2. Aufl. Mit 16 Figuren. (ANuG Bd. 618.) Kart. M. 2.80, geb. . . . . M. 3.50

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, dem Laien die der Relativitätstheorie zugrunde liegenden Gedanken, die heute auf das wissenschaftliche Weltbild umgestaltend einwirken, in ihrer geschichtlichen Entwicklung verständlich zu machen. Er zeigt, welche umstürzende Bedeutung diese neue Theorie auf die bisher unbegründet für selbstverständlich gehaltenen Sätze über Zeit- u. Längenmessung gehabt hat, und welche Ausblicke uns auf der neuen Grundlage bereits erschlossen sind.

Das Relativitätsprinzip. Leichtfaßlich entwickelt von Professor A. Angersbach. (Mathematisch-physikalische Bibliothek Nr. 39.) Kart. . . . . M. 1.40

Ohne das Rüstzeug der höheren Mathematik vorauszusetzen, führt das Bändchen, ausgehend von den Anschauungen der klassischen Mechanik, den Leser schrittweise in die neue Raum- und Zeitauffassung ein.

Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. Von Prof. Dr. A. von Brill. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Heft 3.) 4. Auflage. Geh. . . . . M. 2.80

Das Büchlein beschränkt sich hauptsächlich auf den Teil der Theorie, der den Widerspruch zwischen der Maxwell-Hertzschen Lichttheorie und der Erfahrung zu überbrücken berufen ist. Die Grundgleichungen der Theorie erfahren eine eingehende Behandlung, und es wird an ihnen abgeleitet, wie an Stelle der dreidimensionalen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik die vierdimensionale Impuls-Energiegleichung tritt, und welche Behandlung damit der Begriff „Masse" erfährt. Auch die neuerdings von A. Einstein aufgestellte Theorie der Gravitation wird in längerer Besprechung gewürdigt.

Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalt. in Teylers Stiftung zu Haarlem. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz, Kurator des physik. Laboratoriums in Haarlem. Bearbeitet von Dr. W. H. Keesom, Prof. an der Reichstierarzneischule in Utrecht. Geh. M. 2.—

Die Schrift behandelt nach einer kurzen historischen Einleitung das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die darauf fußende Relativitätsmechanik sowie das Einsteinsche Äquivalenzprinzip. In einem Nachtrage werden einige spezielle Fragen mathematisch weiter ausgearbeitet.

Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Von Prof. Dr. H. A. Lorentz, Kurator des physik. Laboratoriums in Haarlem, Dr. A. Einstein, Professor am Kaiser-Wilhelm-Institut für physik. Chemie, Berlin, Prof. Dr. H. Minkowski. Mit Anmerkungen von Dr. A. Sommerfeld, Professor an der Universität München, und Vorwort von Dr. O. Blumenthal, Professor an der Techn. Hochschule Aachen, und 1 Bildnis H. Minkowskis. 3., verbesserte Auflage. (Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien.) Geh. M. 8.—, geb. M. 11.—

Die vorliegende Sammlung führt die historische Entwicklung der Theorie an Hand der Originalarbeiten vor Augen. Dank dem Entgegenkommen Prof. Einsteins konnten in der neuen Auflage die wichtigsten seiner Arbeiten über die Relativitätstheorie im Zusammenhang zum Abdruck gebracht werden, so daß die Schrift nunmehr zu einem für das Verständnis der Theorie und ihrer Bedeutung grundlegenden Quellenwerk geworden ist.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge: Juli 1920 100%, Abänderung vorbehalten

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin